и система уравнений при наличии связей: вместо T надо взять

$$\mathcal{T} = T + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k$$

и проделать те же выкладки, что и после (11.30), оставляя $\mathbf{F}_i$ в правых частях в роли обобщенных сил. Переход к локальным координатам на многообразии положений опишем с несколько более общих позиций, которые уже выработались у нас при изложении вариационных принципов.

Теорема. Пусть имеется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum\limits_k \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial q_i}, \\ f_k(q, t) = 0, \quad k = 1, \ldots, r \end{cases} \tag{14.6}$$

и $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — локальные координаты на многообразии $\mathfrak{M} = \{f_k = 0\}$, так что $q = q^*(\xi, t)$. Тогда решения системы (6) находятся во взаимно-однозначном соответствии с решениями $\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)$ системы универсальных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial \xi_\alpha} = \Xi_\alpha,$$

причем справедливо тождество

$$\sum_\alpha \Xi_\alpha \delta\xi_\alpha = \sum_i Q_i \delta q_i \tag{14.7}$$

после подстановки формул $q = q^*(\xi, t)$ и их изохронных дифференциалов в правую часть этого равенства.

Доказательство повторяет рассуждения соответствующей теоремы из темы 11 с учетом ковекторного правила преобразования обобщенных сил, описанного только что выше (в нем не использовалась невырожденность замены).

Будем говорить, что обобщенные силы Q_i допускают

ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ,

если имеют место тождества (не путать с уравнениями движения!)

$$Q_i \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} = [W]_{q_i}, \tag{14.8}$$

где $W = W(\dot{q}, q, t)$, т. е. обобщенные силы являются ступенчатыми производными одной и той же функции. Ясно, что в этом случае универсальные уравнения Лагранжа принимают вид обычных уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, L = T - W. \tag{14.9}$$

Силы Q_i не зависят от ускорений $\ddot{q}_i$. Поэтому частные производные $\partial W/\partial \dot{q}_i$ — те, что подвергаются взятию полной производной