Для доказательства рассмотрим лагранжиан свободной материальной точки в неподвижной системе $Oxyz$ и перепишем его в подвижной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$:

$$L=\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}_A+[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}]+\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}\right)^2=$$

$$=\frac{m}{2}\left(\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}\right)^2+\frac{m}{2}\left(\mathbf{v}_A+[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}]\right)^2+m\left(\mathbf{v}+[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}],\ \frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}\right).$$

Последние два слагаемых, взятые с обратным знаком, дадут обобщенный потенциал сил инерции. Если в неинерциальной системе координат движутся несколько точек, то обобщенные потенциалы сил инерции, естественно, суммируются.

Тема 15

ТЕХНИКА УПРАЖНЕНИЙ

В учебных задачах, как правило, встречаются не материальные точки, а твердые тела. В этом случае при вычислении импульса, кинетического момента или кинетической энергии тела надо исходить из того, что пространственное твердое тело характеризуется массой M, положением центра масс S, тремя главными центральными направлениями $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$ и соответствующими главными центральными моментами инерции A, B, C. Пусть в некоторой «неподвижной» системе координат $Oxyz$ точка S имеет радиус-вектор $\mathbf{s}=\overline{OS}$, и пусть угловая скорость тела относительно $Oxyz$ разложена по (правому) главному реперу:

$$\boldsymbol{\omega}=p\mathbf{e}+q\mathbf{e}'+r\mathbf{e}''.$$

Тогда

импульс $\mathbf{P}=M\dot{\mathbf{s}}$,

собственный кинетический момент $\boldsymbol{\Lambda}_S=Ap\mathbf{e}+Bq\mathbf{e}'+Cr\mathbf{e}''$,

полный кинетический момент $\boldsymbol{\Lambda}_O=M[\mathbf{s}\times\dot{\mathbf{s}}]+\boldsymbol{\Lambda}_S$,

кинетическая энергия

$$T=\frac{M}{2}\dot{\mathbf{s}}^2+\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2).$$

Динамические уравнения движения твердого тела имеют вид

$$M\ddot{\mathbf{s}}=\boldsymbol{\Phi}, \tag{15.1}$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ — формальная сумма всех сил, действующих на тело, и

$$\frac{d\boldsymbol{\Lambda}_S}{dt}=\mathbf{G}_S, \tag{15.2}$$

где $\mathbf{G}_S$ — момент сил относительно центра масс. Из этих уравнений следует, что

$$\frac{dT}{dt}=(\boldsymbol{\Phi},\dot{\mathbf{s}})+(\mathbf{G}_S,\boldsymbol{\omega}). \tag{15.3}$$