ную и переносную. Имеем

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \dot{s}\mathbf{e}_\xi,$$

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = [\dot{\alpha}\mathbf{e}_\zeta \times \overline{AS}] = [\dot{\alpha}\mathbf{e}_\zeta \times (s\mathbf{e} \ + r\mathbf{e}_\eta)] =$$

$$= \dot{\alpha}s[\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi] + \dot{\alpha}r[\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\eta] = -r\dot{\alpha}\mathbf{e}_\xi + s\dot{\alpha}\mathbf{e}_\eta. \qquad (15.7)$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = (\dot{s} - r\dot{\alpha})\mathbf{e}_\xi + s\dot{\alpha}\mathbf{e}_\eta.$$

Пусть теперь φ — угол поворота обруча в неподвижной плоскости. Тогда его абсолютная угловая скорость

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{абс}} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\zeta.$$

Поскольку угловая скорость системы координат уже вычислена (6), то относительная угловая скорость обруча

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{отн}} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{абс}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = (\dot{\varphi} - \dot{\alpha})\mathbf{e}_\zeta.$$

В подвижной системе координат обруч катится по оси $O\xi$. Отсюда относительная скорость его центра

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\Omega}_{\text{отн}} \times \overline{PS}] = (\dot{\varphi} - \dot{\alpha})r[\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\eta],$$

и, сравнив с предшествующим вычислением (7), имеем связь

$$\dot{s} - r(-\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) = 0.$$

Следовательно, кинетическая энергия тела

$$T = \frac{m}{2}\mathbf{v}_{\text{абс}}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}[(\dot{s} - r\dot{\alpha})^2 + s^2\dot{\alpha}^2] +$$

$$+ \frac{m}{2}(\dot{s} - r\dot{\alpha})^2 = \frac{m}{2}(2\dot{s}^2 - 4r\dot{s}\dot{\alpha} + (2r^2 + s^2)\dot{\alpha}^2).$$

Потенциальная энергия равна

$$mg(\mathbf{e}_y, \overline{AS}) = mg(\mathbf{e}_y, s\mathbf{e}_\xi + r\mathbf{e}_\eta) = -mg(s\cos\alpha - r\sin\alpha).$$

Уравнения Лагранжа будут:

$$2(\ddot{s} - r\ddot{\alpha}) - s\dot{\alpha}^2 - g\cos\alpha = 0,$$

$$-2\ddot{s} + (s^2 + 2r^2)\ddot{\alpha} + 2s\dot{s}\dot{\alpha} + gs\sin\alpha + r\cos\alpha = 0.$$

Легко видеть, что они допускают частное решение, при котором

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad s(t) = s_0 + gt^2/4 \quad (\ddot{s} = g/2)$$

и, в частности, $\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$. Опираясь на теорему о единственности решения, заключаем, что это и будет движение с заданными начальными условиями. Нить не отклоняется.

Задача 4. Однородный обруч радиуса r, массы M, на который намотана невесомая нить с точечной массой m на конце (рис. 38),