поставлен на шероховатую горизонтальную прямую с коэффициентом трения скольжения k (трение качения отсутствует), причем так, что нить висит вертикально. Покатится он или заскользит?

Пусть (x, y) — координаты центра обруча, φ — абсолютный угол его поворота, $F>0$ — натяжение нити, (R_x, R_y) — реакция опоры в точке касания P. Качение возможно при

$$|R_x|\leqslant k|R_y|$$

и невозможно при противоположном знаке неравенства. Из уравнений движения свободного твердого тела (1)—(2) имеем при $\alpha=0$

$$M\ddot{x}=R_x,\ 0=R_y-Mg-F,$$
$$Mr^2\ddot{\varphi}=r(R_x-F),$$

причем в случае качения (вычислить $\mathbf{v}_S$ двумя способами)

$$r\ddot{\varphi}+\ddot{x}=0.$$

Следовательно,

$$F=2R_x,$$

$$\frac{R_x}{R_y}=\frac{1}{2}\,\frac{F}{Mg+F}=\frac{\ddot{x}(0)}{g+2\ddot{x}(0)}=-\frac{r\ddot{\varphi}(0)}{g-2r\ddot{\varphi}(0)}.$$

Осталось найти $\ddot{\varphi}(0)$. Известно, что если лагранжиан

$$L=\sum a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j-V(q),$$

то уравнения Лагранжа будут:

$$\sum a_{ij}\ddot{q}_j+\sum\gamma^i_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0.$$

В частности, в состоянии мгновенного покоя системы $(\dot{q}_i^{(0)}=0)$

$$A\ddot{q}=-\frac{\partial V}{\partial' q},\qquad(15.8)$$

где A — матрица коэффициентов кинетической энергии. Для решения задачи надо вычислить правую и левую части последнего равенства в нашей конкретной задаче.

За определяющие координаты системы при качении возьмем угол α отклонения нити от вертикали и абсолютный угол поворота обруча. Пусть также s — длина смотавшейся нити.

Для вычислений нам потребуются подвижная система координат. Явно важные точки здесь — центр обруча S, точка P соприкосновения с прямой, точка Q касания нити, точка m. Начало подвижной системы координат помещаем в S, а ось направляем по SQ. Тогда в этой системе координат точки S, Q неподвижны, точка P движется по окружности радиуса r, точка m движется по прямой, параллельной оси $O\xi$.

Угловая скорость системы координат

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}=\dot{\alpha}\mathbf{e}_\zeta,$$