относительная угловая скорость обруча

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{отн}} = (\dot\varphi - \dot\alpha)\,\mathbf{e}_\zeta.$$

Относительная скорость m вычисляется двумя способами:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \dot s\mathbf{e}_\xi = -r(\dot\varphi - \dot\alpha)\,\mathbf{e}_\xi,$$

откуда

$$\dot s = r(\dot\alpha - \dot\varphi), \quad s = r(\alpha - \varphi).$$

Константа интегрирования гасится произволом в выборе φ.

Потенциальная энергия

$$V = mg(\overline{Sm}, \mathbf{e}_y) = mgr(\sin\alpha + (\varphi - \alpha)\cos\alpha),$$

так что

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\alpha=0} = mgr, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$

Переносная скорость точки m равна

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_S + [\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} \times \overline{Sm}] =$$

$$= (-r\dot\varphi\sin\alpha - r\dot\alpha)\,\mathbf{e}_\xi + (-r\dot\varphi\cos\alpha + s\dot\alpha)\,\mathbf{e}_\eta,$$

наконец, абсолютная при $\alpha = 0$

$$\mathbf{v}_{\text{абс}}|_{\alpha=0} = -r\dot\varphi\mathbf{e}_\xi + (r\dot\varphi + s\dot\alpha)\,\mathbf{e}_\eta.$$

Поэтому кинетическая энергия системы в положении $\alpha = 0$

$$T = \frac{m}{2}(2r^2\dot\varphi^2 - 2sr\dot\alpha\dot\varphi + s^2\dot\alpha^2) + \frac{1}{2}2Mr^2\dot\varphi^2.$$

Уравнение (8) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 2(M+m)r^2 & -msr \\ -msr & ms^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot\varphi(0) \\ \ddot\alpha(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mgr \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\ddot\varphi(0) = \frac{-mgr\cdot ms^2}{2m(M+m)r^2s^2 - m^2s^2r^2} = -\frac{mg}{(2M+m)r},$$

так что условие качения получается таким:

$$\frac{m}{2M+3m} \leqslant k.$$

Замечание. Если просто тянуть обруч за нить с силой $\mathbf{F} = mg$, то получим

$$\frac{m}{2M+2m} \leqslant k,$$

если же масса m жестко прикреплена к обручу и находится в крайнем положении, то

$$\frac{m^2+Mm}{m^2+M(2M+4m)} \leqslant k.$$