

Задача 5. Внутри неподвижной вертикальной окружности радиуса $\rho+r$ катается однородный диск радиуса r массы M , по которому в свою очередь катается однородная палочка длины $2l$, массы m . Определить, при каких условиях будет устойчиво положение равновесия, в котором диск находится внизу, а палочка лежит на нем горизонтально. Определить частоты малых колебаний при $m \rightarrow 0$.

Явно важными точками являются центр неподвижной окружности O , центр диска A , точка касания диска и окружности B , центр палочки S , точка соприкосновения ее с диском P . Определяющие координаты надо выбрать из следующих переменных:

угол θ поворота радиуса-вектора OA ,

угол φ поворота диска,

угол ψ поворота палочки,

расстояние s между точками S и P .

Наиболее приемлемыми представляются θ, ψ . Для вычисления кинетической и потенциальной энергии необходимо, в частности, выразить s и φ через θ, ψ . Будем искать подвижную систему координат.

Отметим явно важные точки на чертеже (рис. 39). Если мы возьмем в качестве начала точку O , а ось пустим по OAB , то траектория точки S простой не получится. Придется примириться с тем, что и начало и оси системы движутся. Достаточно просто движется точка A — поместим начало в нее. Если мы теперь направим ось $O\xi$ в точку P , то точка B в полученной системе будет двигаться по окружности, а точка S — по прямой, параллельной оси $O\xi$.

Скорость начала системы $A\xi\eta$ по модулю

$$|\mathbf{v}_A| = \rho |\dot{\theta}|.$$

С другой стороны, поскольку в точке B находится мгновенный центр скоростей диска,

$$|\mathbf{v}_A| = r |\dot{\varphi}|,$$

откуда с учетом направления вращения имеем первую связь:

$$\rho \dot{\theta} + r \dot{\varphi} = 0. \quad (15.9)$$

Относительная угловая скорость диска

$$\omega_{\text{отн}} = (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \mathbf{e}_z.$$

Относительная скорость точки s имеет два выражения:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \dot{s} \mathbf{e}_z = -r (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \mathbf{e}_z.$$

Учитывая (9), мы получим вторую связь — между \dot{s} , $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$:

$$\dot{s} = -r \dot{\varphi} + r \dot{\psi} = \rho \dot{\theta} + r \dot{\psi} \quad (15.10)$$

и, наконец,

$$s = \rho \theta + r \psi.$$