Потенциальная энергия системы

$$V = Mg(\overline{OA}, \mathbf{e}_y) + mg(\overline{OS}, \mathbf{e}_y) = (Mg\overline{OA} + mg(\overline{OA} + \overline{AP} + \overline{PS}, \mathbf{e}_y) =$$
$$= -Mg\rho\cos\theta + mg(-\rho\cos\theta + r\cos\psi + (\rho\theta + r\psi)\sin\psi).$$

Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки $\theta=\psi=0$. С точностью до членов третьего порядка малости

$$\frac{V}{g} = mr - (M+m)\rho + \frac{(M+m)}{2}\rho\theta^2 + m\rho\theta\psi + mr\frac{\psi^2}{2}.$$

Матрица вторых производных

$$B = g\begin{pmatrix}(M+m)\rho & m\rho \\ m\rho & mr\end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы положительны. Для устойчивости достаточно, чтобы в точке $\theta=\psi=0$ был строгий минимум функции V, т. е., в данном случае, чтобы определитель был положителен:

$$(m+M)m\rho r - m^2\rho^2 > 0.$$

В случае противоположного знака неравенства V имеет седловую точку, и равновесие неустойчиво в первом приближении. Итак, условие устойчивости имеет вид

$$r > \frac{m}{m+M}\rho.$$

Для вычисления частот малых колебаний надо вычислить матрицу A кинетической энергии в положении равновесия $\theta=\psi=0$. В этом положении скорость начала системы координат

$$\mathbf{v}_A = \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\xi;$$

ее угловая скорость (она и всегда такая)

$$\omega_{\text{пер}} = \dot{\psi}\mathbf{e}_\zeta,$$

переносная скорость точки S,

$$\mathbf{v}_S^{\text{пер}} = \mathbf{v}_A + [\omega_{\text{пер}} \times \overline{AS}] = \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\xi + r\dot{\psi}[\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\eta] = (\rho\dot{\theta} - r\dot{\psi})\mathbf{e}_\xi,$$

относительная ее скорость (10)

$$\mathbf{v}_S^{\text{отн}} = \dot{s}\mathbf{e}_\xi = (\rho\dot{\theta} + r\dot{\psi})\mathbf{e}_\xi.$$

Таким образом, кинетическая энергия при $\psi=\theta=0$

$$T = \frac{M}{2}\mathbf{v}_A^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{v}_S^2 + \frac{ml^2}{6}\dot{\psi}^2 =$$
$$= \frac{3}{4}M\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\left(4\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\psi}^2\right).$$