Ее матрица

$$A=\begin{pmatrix}\left(\frac{3}{2}M+4m\right)\rho^2 & 0\\ 0 & \frac{ml^2}{3}\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение напишем при $M=g=\rho=1$:

$$\det(A\omega^2-B)=0 \Rightarrow ((3+8m)\omega^2-2(1+m))(l^2\omega^2-3r)-6m=0.$$

Устремляя $m\to 0$, получим $\omega_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\omega_2=\sqrt{\frac{3r}{l^2}}$. В общем виде

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2g}{3\rho}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3gr}{l^2}}.$$

Это соответственно частота малых колебаний одного только диска без палочки и частота малых колебаний палочки на неподвижном диске. Результат физически очевидный.

Задача 6. Палочка длины $2l$ подвешена на двух вертикальных нитях длины a и b, прикрепленных на расстоянии к наклонной (под углом γ) прямой (рис. 40). Определить частоту плоских малых колебаний около этого состояния равновесия.

Явно важные точки в этой задаче — это концы и середина палочки и места закрепления нити. Простые траектории у этих точек будут только в системе координат, жестко связанной с палочкой, но это не облегчит нам описание кинематики палочки. Поэтому от применения подвижной системы координат откажемся.

Для решения задачи достаточно вычислить вторую производную потенциальной энергии:

$$V(\alpha)=-\frac{mg}{2}(a\cos\alpha+b\cos\beta)$$

в положении равновесия (с учетом связи между α и β) и кинетическую энергию палочки в положении (именно положении, а не состоянии) равновесия. Для этого заметим, что при $\alpha=\beta=0$ скорости концов палочки горизонтальны и не ортогональны ей. Отсюда следует, что палочка движется мгновенно-поступательно, т. е. ее угловая скорость обращается в нуль (мгновенный центр скоростей уходит в бесконечность). Поэтому скорости концов равны между собой. Отсюда

$$a\dot{\alpha}=b\dot{\beta},$$

так что связь имеет вид

$$\beta=\frac{a}{b}\alpha+O(\alpha^2),$$