В инерциальной системе координат, связанной с центром масс точек m_1 и m_2, эти точки движутся в постоянной плоскости по кеплеровским орбитам: окружностям, эллипсам, параболам, гиперболам или прямым. Будем рассматривать только первый случай: тогда говорят о круговой ограниченной задаче трех тел. Кроме того, будем рассматривать только те движения единичной массы, которые лежат в плоскости орбит m_1, m_2. Итак, в плоскости OXY вокруг точки O вращаются две массы μ и $M-\mu$ с угловой скоростью ω; они притягивают третью, единичную массу, по закону тяготения Ньютона. Требуется исследовать движения этой массы (рис. 78).

Угловая скорость вращения $\omega=\omega(M, \mu, r, \rho, f)$, причем величины M, r, f размерно независимы: $[f]=L^3/T^2M$. Отсюда

$$\omega=\sqrt{\frac{fM}{r^3}}\,\bar{\omega}\left(\frac{\mu}{M}, \frac{\rho}{r}\right).$$

Впредь мы можем принимать $M=r=f=1$. Покажем, что тогда $\omega=\bar{\omega}\equiv 1$. Введем подвижную систему координат Oxy с началом в центре масс и вращающуюся с угловой скоростью ω. Относительно нее каждая из масс $M-\mu$, μ находится в равновесии, т. е. переносная сила инерции уравновешивается гравитационной:

$$\mu\omega^2(1-\rho)=\mu(1-\mu), \quad (1-\mu)\omega^2\rho=\mu(1-\mu).$$

Отсюда

$$\mu(1-\rho)=(1-\mu)\rho$$

(это означает, что центр масс — в начале координат), так что

$$\rho=\mu, \quad \bar{\omega}=1.$$

Лагранжиан $L=T-V$ выпишем в подвижной системе координат:

$$T=\frac{1}{2}\mathbf{v}_{\text{абс}}^2=\frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\text{отн}}+[\mathbf{e}_z\times\mathbf{r}])^2=\frac{1}{2}((\dot{x}-y)^2+(\dot{y}+x)^2),$$

$$V=-\frac{1-\mu}{\sqrt{(\mu+x)^2+y^2}}-\frac{\mu}{\sqrt{(1-\mu-x)^2+y^2}}=-\frac{1-\mu}{R_1}-\frac{\mu}{R_2},$$

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+(x\dot{y}-y\dot{x})+\frac{1}{2}(x^2+y^2)-V.$$

Уравнения движения имеют следующий вид (мы получили автономную обобщенно-натуральную систему):

$$\begin{cases} \ddot{x}-2\dot{y}+\dfrac{\partial W}{\partial x}=0, \\ \ddot{y}+2\dot{x}+\dfrac{\partial W}{\partial y}=0, \end{cases}$$

где $W=V-(x^2+y^2)/2$. Отсюда положения относительного равновесия (в инерциальной системе координат им соответствуют движения по окружности) определяются из системы уравнений