$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$. Произведем вычисления:

$$\frac{\partial W}{\partial y} \equiv -y + \frac{1-\mu}{R_1^3} y + \frac{\mu}{R_2^3} y \equiv y f(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \equiv -x + \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{R_1^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{R_2^3} =$$

$$= x f(x, y) + \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) = 0.$$

Положения относительно равновесия в этой задаче (критические точки W) называются точками либрации. Они могут быть двух типов:

а) Коллинеарные точки либрации L_1, L_2, L_3 (точки Эйлера): $y=0$. Тогда для нахождения нужных значений x надо определить точки экстремума функции

$$W(x, 0) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1-\mu}{|x+\mu|} - \frac{\mu}{|x-1+\mu|}.$$

Таких точек ровно три, что легко увидеть из графика (рис. 79) и доказать, если надо, аккуратно (функция простая; в частности, она выпукла на каждом интервале непрерывности).

б) Треугольные точки либрации L_4, L_5 (точки Лагранжа): $y \neq 0$. Тогда из первого уравнения следует $f=0$, а из второго — $R_1 = R_2$, т. е. единичная масса составляет с притягивающими равносторонний треугольник. Координаты такой точки либрации:

$$x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm\sqrt{3}/2.$$

Произведем линеаризацию в окрестности точки либрации, для чего положим $x = x_* + \xi$, $y = y_* + \eta$. Тогда уравнения движения в первом приближении получат вид

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_* \xi + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_* \eta = 0,$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right|_* \xi + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_* \eta = 0.$$

Им можно придать форму (см. конец темы 12)

$$A\begin{pmatrix}\ddot{\xi}\\ \ddot{\eta}\end{pmatrix} + G\begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = 0.$$

Нас интересует только вопрос об устойчивости равновесий в первом приближении.

А. Коллинеарные точки либрации:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = b > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = a < 0.$$