Складывая все три формулы, получаем

$$W = \ldots - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (\xi^2 + 2(1-2\mu)\sqrt{3}\,\xi\eta + 3\eta^2).$$

Отсюда уравнения первого приближения:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \frac{3}{4}\xi - \frac{\sqrt{27}}{4}(1-2\mu)\eta = 0,$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \frac{\sqrt{27}}{4}(1-2\mu)\xi - \frac{9}{4}\eta = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 3/4 & -2\lambda - \frac{\sqrt{27}}{4}(1-2\mu) \\ 2\lambda - \frac{\sqrt{27}}{4}(1-2\mu) & \lambda^2 - 9/4 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0.$$

Его дискриминант равен $1-27\mu(1-\mu)$; если он положителен, то оба корня квадратного уравнения отрицательны, и имеем устойчивость. В противном случае чисто мнимых корней мы не получим. Итак, условие устойчивости

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}.$$

Это значит, что μ (или $1-\mu$) довольно мало, примерно $<0{,}04$ (в общем случае отношение приведенной массы к суммарной $<1/27$).

Лагранжиан от времени не зависит. Интеграл типа энергии

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + W = h.$$

При каждом фиксированном h на плоскости Oxy выделяется

область Хилла $\{W(x, y) \leqslant h\}$

(область возможности движения), граница которой называется кривой Хилла (в этой задаче). Число кривых Хилла и их расположение меняются, когда h пересекает одно из критических значений функции $W(L_i)$. Нетрудно показать, что всегда

$$W(L_1) < W(L_2), \quad W(L_3) < W(L_4) = W(L_5).$$

Из наших вычислений вторых производных в точках либрации вытекает, что L_1, L_2, L_3 являются седлами, L_4, L_5 — симметричными максимумами. Кроме того, $W \to -\infty$, когда (x, y) стремится к одной из притягивающих точек или к бесконечности. Таким образом, график W можно представить себе как большую параболоидальную гору, вблизи вершины которой образовались две бес-