импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{17.5}$$

путем обращения последних формул при фиксированных q, t (обращение возможно в силу регулярности). Таким образом, эта теорема носит локальный характер.

Функция $\Sigma p_i \dot{q}_i - L$ и есть та самая, которая была интегралом типа энергии в случае, когда $\partial L/\partial t \equiv 0$. Будучи выраженной через p, q, t, она называется гамильтонианом или функцией Гамильтона. В частности,

ГАМИЛЬТОНИАН КЛАССИЧЕСКОЙ НАТУРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

$$H = (p_1, \ldots, p_n) \begin{pmatrix} a^{11} & \ldots & a^{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a^{n1} & \ldots & a^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + V, \tag{17.6}$$

где

$$\| a^{ij} \| = \| a_{ij} \|^{-1},$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q, t)\, \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q, t). \tag{17.7}$$

При вычислении конкретных гамильтонианов надо пользоваться не общей формулой (4), а частным результатом (6) (или хотя бы (11.56)), так как в противном случае придется каждый раз проводить одни и те же приведения подобных членов, повторяя схему вывода формулы (6). Вот этот вывод:

$$p_i = \sum_j a_{ij}\dot{q}_j \Rightarrow \dot{q}_j = \sum_k a^{jk} p_k \Rightarrow H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + V =$$
$$= \sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j +$$
$$+ V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij} a^{ik} a^{jl} p_k p_l + V = \frac{1}{2}\sum_{k,l} a^{kl} p_k p_l + V.$$

В данном случае обращение формул (5) производится не локально, а сразу на всей области определения $\mathbf{R}^n(\dot{q})$ и значений $\mathbf{R}^n(p)$.

Для точки в трехмерном пространстве в консервативном поле

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z),$$

$$A = \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{Vmatrix},$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \tag{17.8}$$