С динамической точки зрения p_x, p_y, p_z — компоненты обычного импульса:

$$p_x = m\dot{x},\quad p_y = m\dot{y},\quad p_z = m\dot{z}. \tag{17.9}$$

Разумеется, подставлять эти формулы в (17.8) не следует. Существо формализма канонических уравнений состоит именно в пользовании только переменными p, q, t.

Доказательство теоремы. Уравнения Лагранжа в силу регулярности лагранжиана можно привести к системе первого порядка (темы 11):

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q},\quad \frac{d\dot{q}}{dt} = X(\dot{q}, q, t). \tag{17.10}$$

Согласно центральной лемме (там же),

$$\frac{d^X}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{17.11}$$

Кроме того,

$$\frac{d^X}{dt} q_i = \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i. \tag{17.12}$$

От переменных $\dot{q}$, q мы переходим к переменным p, q. Поэтому правые части уравнений (11), (12) выразим через них:

$$\frac{d^X p_i}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_{\dot{q}_i = f_i(p,q,t)},\quad \frac{dq_i}{dt} = f_i(p, q, t).$$

Осталось показать, что

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\Big|_{\dot{q}=f} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{17.13}$$

$$f_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{17.14}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_k p_k f_k - L|_{\dot{q}=f}\right) = \sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} + \left(-\frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right)_{\dot{q}=f} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}\Big|_{\dot{q}=f},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_k p_k f_k - L|_{\dot{q}=f}\right) = f_i + \sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial p_i} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial f_k}{\partial p_i} = f_i.$$

Теорема доказана. Попутно получена полезная формула (14). Она позволяет сначала выписать гамильтониан (по формуле (6)), а потом установить связь определяющих скоростей $\dot{q}_i$ с импульсами p_i. Эта связь одновременно составляет половину уравнений Гамильтона (1).

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ