Пусть имеется функция $F(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n, t)$. Ее производная в силу системы уравнений (1) имеет вид

$$\frac{d^H}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right).$$

Определение. Говорят, что в выражении функции H переменные $p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_k$ отделяются, если существуют функции

$$\chi = f(p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_k)$$

(от времени t не зависит!) и

$$\tilde{H}(\chi, p_{k+1}, ..., p_n, q_{k+1}, ..., q_n, t)$$

такие, что

$$H(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n, t) =$$

$$= \tilde{H}(f(p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_k), p_{k+1}, ..., p_n, q_{k+1}, ..., q_n, t). \quad (17.15)$$

Теорема. В этом случае функция f является первым интегралом уравнения Гамильтона.

Доказательство. Учитывая структуру f и H, имеем

$$\frac{d^H}{dt} f = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \chi} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \chi} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \equiv 0.$$

Следствия.

1) Если $f = H$ (при этом H не зависит от времени), то функция $H(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ есть первый интеграл (это — обобщение интеграла энергии).

2) Если $\frac{\partial H}{\partial q_n} \equiv 0$, то положим $f(p_n, q_n) = p_n$ и получим, что $p_n = \text{const}$ — первый интеграл. Это — обобщение кинестенического (циклического) интеграла. Разумеется, его можно получить и просто из

$$\frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \equiv 0.$$

Формулы (4), (5), (13) показывают, что $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ или $\frac{\partial H}{\partial q_n} \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$ или соответственно $\frac{\partial L}{\partial q_n} \equiv 0$. Поэтому в конкретных задачах интеграл типа энергии