или кинестенический интеграл одинаково легко получить как при помощи формализма Эйлера — Лагранжа, так и при помощи канонического формализма. Получать интегралы иного происхождения удобнее (намного удобнее) на основе канонического формализма. Приведем пример:

ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ПЛОСКОГО ДИПОЛЯ

Потенциальная энергия дается формулой (3.11). Выпишем лагранжиан в полярных и декартовых координатах:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{k\cos\theta}{r^2},$$

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}^3}.$$

Он не зависит от времени, так что интеграл энергии у нас есть. Есть ли еще один интеграл? Циклической координаты ни в системе определяющих координат r, φ, ни в системе x, y нет. Выпишем гамильтониан:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+\frac{k\cos\theta}{r^2},$$

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}^3}.$$

Первый вариант можно привести к виду:

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{1}{2r^2}\left(\frac{p_\theta^2}{m}+k\cos\theta\right).$$

Видно, что переменные θ и p_θ отделились, а функция

$$f=p_\theta^2/m+k\cos\theta$$

является первым интегралом. Поскольку

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},$$

этот интеграл можно представить в эквивалентных формах:

$$f=mr^4\dot{\theta}^2+k\cos\theta=\mathrm{const},$$

$$f=m(x\dot{y}-y\dot{x})^2+kx/\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{const}.$$

Получается интеграл уравнений Эйлера — Лагранжа, не являющийся кинестеническим ни в каких координатах, так как кинестенический интеграл всегда линеен по определяющим скоростям (например, при движении в центральном поле сил $V=V(r)$ сохраняется $p_\theta=mr^2\dot{\theta}$).

СКОБКА ПУАССОНА

функций $F(p,q,t)$ и $G(p,q,t)$ задается формулой

$$(F,G)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right). \tag{17.16}$$