Таким образом,

$$\frac{d^H F}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (F, H). \tag{17.17}$$

В частности, имеет место интересное *операторное представление уравнений Гамильтона*:

$$\dot{p}_i = (p_i, H), \quad \dot{q}_i = (q_i, H). \tag{17.18}$$

С его помощью легко вычисляются *базисные скобки Пуассона*:

$$(q_i, q_j) = (p_i, p_j) \equiv 0, \ (q_i, p_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \tag{17.19}$$

$\left(\text{например, } (q_i, q_j) = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \equiv 0 \text{ при } H = q_j\right)$.

Перечислим свойства скобок Пуассона, вытекающие из определения, но вместе с (19) более удобные при вычислениях:

1. Антисимметричность: $(F, G) = -(G, F)$;

2. Операторное свойство: если $F = \varphi(f_1, \dots, f_m)$, то

$$(F, G) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial f_l}(f_l, G). \tag{17.20}$$

Это легко видно из

$$(F, G) = \frac{d^G}{dt} F - \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial f_l} \frac{d^G}{dt} f_l - \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial f_l} \frac{\partial f_l}{\partial t} =$$

$$= \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial f_l} \left(\frac{d^G}{dt} f_i - \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) = \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial f_l} (f_l, G).$$

В частности,

$$(\alpha F, G) = \alpha (F, G), \tag{17.21}$$

$$(F_1 + F_2, G) = (F_1, G) + (F_2, G). \tag{17.22}$$

$$(F_1 F_2, G) = F_1 (F_2, G) + F_2 (F_1, G). \tag{17.23}$$

Другими словами, взятие скобки Пуассона с заданной функцией G является дифференциальным оператором.

3. Тождество Пуассона:

$$((F, G), H) + ((H, F), G) + ((G, H), F) \equiv 0. \tag{17.24}$$

Его можно доказать прямой выкладкой, которую мы опустим.

4. Правило дифференцирования по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(F, G) = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}, G\right) + \left(F, \frac{\partial G}{\partial \alpha}\right). \tag{17.25}$$

Здесь α — переменная, не входящая в список $p_1, \dots, p_n$, $q_1, \dots, q_n$. В частности, может быть, $\alpha = t$.