*Теорема Пуассона.* Если $F(p, q, t)$, $G(p, q, t)$ — первые интегралы канонических уравнений с функцией $H(p, q, t)$, то их **скобка Пуассона** $(F, G)$ — **тоже интеграл** тех же уравнений.

Доказательство основывается на всех свойствах 1—4. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(F, H)\equiv 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t}+(G, H)\equiv 0,$$

поскольку $F$, $G$ — первые интегралы. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}(F, G)+((F, G), H)=$$

$$=\left\{+\begin{matrix}\left(F, \dfrac{\partial G}{\partial t}\right)-((G, H), F)\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial t}, G\right)-((H, F), G)\end{matrix}\right\}=\left\{+\begin{matrix}\left(F, \dfrac{\partial G}{\partial t}+(G, H)\right)\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial t}+(F, H), G\right)\end{matrix}\right\}\equiv 0,$$

что и требовалось.

Эффективным способом получать новые первые интегралы теорема Пуассона не является, так как скобка Пуассона редко выводит за пределы заданного класса функций. Примером будут

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА

для движения точки в трехмерном пространстве. Наряду с гамильтонианом (8) рассмотрим также функции $x$, $y$, $z$ (координаты) $p_x$, $p_y$, $p_z$ (импульсы) и

$$\Lambda_x=yp_z-zp_y, \quad \Lambda_y=zp_x-xp_z, \quad \Lambda_z=xp_y-yp_x$$

(моменты импульсов). Требуется вычислить попарные скобки Пуассона всех перечисленных десяти функций. Базисные скобки Пуассона в данном случае суть

$$\begin{gathered}(x, p_x)=1, \ (x, p_y)=0, \ (x, p_z)=0,\\ (y, p_x)=0, \ (y, p_y)=1, \ (y, p_z)=0,\\ (z, p_x)=0, \ (z, p_y)=0, \ (z, p_z)=0\end{gathered}$$

(заодно это — часть фундаментальных скобок). После вычислений, в частности, получается

$$\begin{gathered}(p_x, H)=-\frac{\partial V}{\partial x}, \ (\Lambda_z, H)=-x\frac{\partial V}{\partial y}+y\frac{\partial V}{\partial x},\\ (\Lambda_z, p_z)=0, \ (\Lambda_z, p_x)=p_y, \ (\Lambda_z, p_y)=-p_x,\\ (\Lambda_z, z)=0, \ (\Lambda_z, x)=y, \ (\Lambda_z, y)=-x,\\ (\Lambda_x, \Lambda_y)=\Lambda_z\end{gathered}$$

и аналогично для других комбинаций индексов.

Выкладку приведем только для последней скобки:

$$(yp_z-zp_y, \ zp_x-xp_z)=$$