$$= (yp_z, zp_x) - (zp_y, zp_x) - (yp_z, xp_z) + (zp_y, xp_z) =$$
$$= yp_x(p_z, z) - 0 - 0 + xp_y(z, p_z) = xp_y - yp_x.$$

Видим, что вычисление попарных скобок взятых функций (с естественным физическим содержанием) почти не вывело нас за пределы заданного списка. Исключение составляют первые скобки, но как раз их надо приравнивать к нулю, чтобы p_x или Λ_z были бы первыми интегралами.

ТЕОРЕМА ЛИ

Функция $F(p, q)$ есть первый интеграл канонических уравнений с функцией $H(p, q)$ тогда и только тогда, когда функция $H(p, q)$ инвариантна относительно фазового потока системы кинетических уравнений с гамильтонианом F.

Доказательство. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0$, мы имеем $(F, H) \equiv 0$. Пусть зависимости

$$p = \bar{p}(p^0, q^0, s), \quad q = \bar{q}(p^0, q^0, s) \tag{17.26}$$

представляют собой общее решение канонических уравнений

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{dq}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p}. \tag{17.27}$$

Инвариантность функции H означает, что

$$H(\bar{p}(p^0, q^0, s), \bar{q}(p^0, q^0, s)) = H(p^0, q^0),$$

что после дифференцирования по s эквивалентно

$$\frac{dH}{ds} = \sum_i \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = (H, F) \equiv 0.$$

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим случай, когда движение точки в трехмерном пространстве имеет первый интеграл $\Lambda_z = xp_y - yp_x$. Каков смысл потока, порождаемого этим интегралом? Уравнения (27) будут:

$$\frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial \Lambda_z}{\partial x} \equiv -p_y, \quad \frac{dp_y}{ds} = -\frac{\partial \Lambda_z}{\partial y} \equiv p_x, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial \Lambda_z}{\partial z} \equiv 0,$$

$$\frac{dx}{ds} = -y, \quad \frac{dy}{ds} = x, \quad \frac{dz}{ds} = 0;$$

из последних трех уравнений вытекает, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

так что поток (26) здесь отвечает группе поворотов вокруг оси z. Вообще, линейному по импульсам интегралу

$$F = \Sigma \varphi_i(q) p_i$$