В случае, когда интеграл F линеен по импульсам, можно произвести сравнение с теоремой Ли—Нетер. Соответствующий интеграл

$$J = \Sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial s} = \Sigma p_i \frac{\partial q_i}{\partial s}$$

может зависеть от времени. Таким образом, лагранжиан L в этом случае инвариантен, а гамильтониан — нет.

На практике лагранжианы, гамильтонианы и первые интегралы редко зависят от времени, поэтому принято всегда ассоциировать существование интеграла с инвариантностью гамильтониана (хотя, строго говоря, как мы видели, это не совсем оправдано). Эта трактовка восходит к Ли. Изложенной только что теоремы точно в том виде, как она здесь дана, сам Ли не формулировал, поскольку оперировал, главным образом, не с обыкновенными дифференциальными уравнениями в канонической форме, а с некоторым тесно связанным с ними уравнением в частных производных, к изучению которого мы приступаем в следующей теме.

Тема 18

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Пусть есть система канонических уравнений

$$\frac{'dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial' q}, \quad \frac{'dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial' p}, \quad H = H(p, q, t). \tag{18.1}$$

Соответствующим уравнением Гамильтона—Якоби называется уравнение в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0. \tag{18.2}$$

Вместо каждого вхождения переменной p_i в выражение для H подставляется $\partial S/\partial q_i$ и ко всему прибавляется $\partial S/\partial t$. Получается левая часть. Задача Коши для этого уравнения обычно ставится так: найти решение $S(q, t)$ такое, что

$$S(q, t_0) = \varphi(q). \tag{18.3}$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Пусть $S(q, t)$ — решение. В расширенном фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n+1}(p, q, t)$ введем многообразие

$$\mathbf{L} = \left\{p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n}\right\}. \tag{18.4}$$

Оно называется когерентным, или лагранжевым.

Теорема. Многообразие $\mathbf{L}$ является инвариантным для исходной канонической системы, т. е. как бы «соткано из решений»: если начальная точка $(p^0, q^0, t^0) \in \mathbf{L}$, то соответствующее решение уравнений (1) целиком лежит на $\mathbf{L}$.