Доказательство. Вообще, многообразие

$$\mathbf{L}=\{F_1(x, t)=\ldots=F_k(x, t)\}\subset\{(x, t)\}$$

инвариантно относительно системы

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x, t)$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{d^X}{dt}F_l=\sum_i\frac{\partial F_l}{\partial x_i}X_i=0\,|_{(x,t)\in\mathbf{L}}.$$

В нашем случае должно быть

$$-\frac{dp_l}{dt}+\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial q_l}=\frac{\partial H}{\partial q_l}+\sum_i\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_l}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_l}=$$

$$=\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_l}+\frac{\partial H}{\partial q_l}+\sum_i\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_i}=0\Big|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}}. \tag{18.5}$$

Это действительно так, ибо если мы продифференцируем

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S(q, t)}{\partial q}, q, t\right)=0$$

по q_l, то получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_l\partial t}+\frac{\partial H}{\partial q_l}+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial q_l\partial q_i}=0\Big|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}},$$

что совпадает с (5).

Существо доказанной теоремы в том, что уравнения (1) являются уравнениями характеристик Коши для уравнения в частных производных (2). Дальнейшее фактически является трактовкой этого обстоятельства в специфических условиях.

ПОЛНЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

Так называется семейство решений уравнения Гамильтона—Якоби $S(\alpha, q, t)$, зависящее от n параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяющее условию невырожденности

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_k}\right\|\neq 0. \tag{18.6}$$

Не следует думать, что полный интеграл содержит все решения уравнения Гамильтона—Якоби, как это может показаться по звучанию термина. Например, $S+f(\alpha)$ — тоже полный интеграл, не совпадающий с S. Однако все решения уравнения Гамильтона полный интеграл действительно позволяет получить.

Теорема Якоби. Если найден полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, то общее решение уравнений Гамильтона по-