лучается из соотношений

$$p = \frac{'\partial S}{\partial' q}, \qquad (18.7)$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial' \alpha}, \qquad (18.8)$$

в которых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ рассматриваются как произвольные константы.

Процедура получения общего решения состоит в следующем. Последние соотношения имеют вид

$$\beta_k = f_k(\alpha, q, t) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}.$$

Заметим, что

$$\det\left\| \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right\| = \det\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\| \neq 0.$$

Следовательно, из соотношений (8) можно выразить

$$q_i = \bar{q}_i(\alpha, \beta, t),$$

а после подстановки в первые n равенств (7) получим

$$p_i = \bar{p}_i(\alpha, \beta, t) = \frac{\partial S}{\partial q_i}(\alpha, \bar{q}(\alpha, \beta, t), t).$$

Это и будут формулы общего решения с $2n$ постоянными.

Доказательство теоремы. Поскольку первые уравнения — (7) — задают инвариантные многообразия (при любых произвольно зафиксированных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$), достаточно показать, что последние n равенств (8) обладают тем же свойством (при любых произвольно зафиксированных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$: тогда их совместный уровень будет иметь размерность $2n+1-n-n=1$, т. е. окажется фазовой траекторией). В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial' \alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial' \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial' \alpha} \cdot \frac{'dq}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial' \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial' \alpha} \cdot \frac{\partial H}{\partial' p}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial' \alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{'\partial S}{\partial q}, q, t\right)\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial' \alpha \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial' \alpha \partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial' p}.$$

Это и требовалось.

Подчеркнем, что все рассуждения носят локальный характер. В частности, не утверждается, что существует полный интеграл, определенный при всех q для каждого α. Скоро мы увидим, какие здесь возникают трудности.

ИСКЛЮЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Допустим, что функция Гамильтона не зависит от времени: $H = H(p, q)$. Тогда уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = 0. \qquad (18.9)$$