Применим следующий прием. Будем искать полный интеграл этого уравнения в виде

$$S(\alpha, q, t) = -h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)t + I(\alpha, q). \tag{18.10}$$

Здесь $h(\alpha)$ — функция, которая подбирается из каких-то дополнительных соображений или просто берется произвольно. Обычно берут просто $h \equiv \alpha_1$. Подставим выражение $S = -ht + I$ в уравнение (9). Получим

$$H\left(\frac{\partial I}{\partial q}, q\right) = h(\alpha). \tag{18.11}$$

Видим, что получилось уравнение в частных производных с меньшим числом переменных (переменная t отсутствует).

Формулы теоремы Якоби (7), (8) становятся такими:

$$p = \frac{\partial I}{\partial q^0},\ \beta = -\frac{\partial h}{\partial \alpha}t + \frac{\partial I}{\partial \alpha}.$$

Поскольку система сейчас автономна, выбор начального времени роли не играет; в частности, можно положить $t=0$, $p=p^0$, $q=q^0$. Получим

$$p^0 = \frac{\partial I}{\partial q^0},\ \beta = \frac{\partial I}{\partial \alpha}, \tag{18.12}$$

где $I = I(q^0, \alpha)$. Далее

$$\det\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_k} \right\| = \det\left\| \frac{\partial^2 I}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\|. \tag{18.13}$$

Поэтому, как и в теореме Якоби, алгебраические преобразования позволяют получить

$$p^0 = p^0(\alpha, \beta),\ q^0 = q^0(\alpha, \beta).$$

В этом смысл функции $I(\alpha, q^0)$: формулы (12) связывают произвольные константы α, β с начальными значениями p^0, q^0. Более того, общее решение задачи имеет вид

$$p = p^0\left(\alpha, \beta + \frac{\partial h}{\partial \alpha} t\right),$$

$$q = q^0\left(\alpha, \beta + \frac{\partial h}{\partial \alpha} t\right). \tag{18.14}$$

Впредь мы опустим индекс ^{0} в уравнениях (12) и будем исследовать так называемые формулы перехода:

$$p = \frac{\partial I}{\partial q},\ \beta = \frac{\partial I}{\partial \alpha}. \tag{18.15}$$

(11) называют укороченным уравнением Гамильтона—Якоби. Доказывать (локальных) теорем существования полного интеграла не будем, так как дальнейшее будет посвящено непосредственному решению укороченного уравнения Гамильтона—Якоби в зада-