чах механики. Подчеркнем, что для решения задачи важен не столько сам полный интеграл I этого уравнения, сколько формулы перехода (15).

К функции I всегда можно прибавить $f(\alpha)$; тогда формулы (15) примут вид

$$p=\frac{\partial I}{\partial q},\ \beta=\frac{\partial I}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}. \tag{18.16}$$

Итак, переменные β определены с точностью до сдвига на $\partial f/\partial\alpha$.

ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Лагранжиан одномерной натуральной системы всегда приводится к виду $L=\dot{s}^2/2-V(s)$; тогда гамильтониан

$$H=\frac{p_s^2}{2}+V(s),$$

уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial I}{\partial s}\right)^2+V(s)=h(\alpha). \tag{18.17}$$

Видим, что оно может иметь решение только в области возможности движения $\mathfrak{M}^h=\{V(s)<h\}$. Преобразуем его:

$$p_s=\frac{\partial I}{\partial s}=\pm\sqrt{2(h(\alpha)-V(s))}. \tag{18.18}$$

Мы получили одновременно первую формулу перехода (15) и уравнение, позволяющее получить I путем интегрирования. На плоскости p, q уравнение (18) задает две симметричные кривые, отвечающие фиксированной константе α; константа β меняется вдоль каждой кривой. Имеем соответственно, взяв начальную точку интегрирования $s_0(\alpha)\in\mathfrak{M}^{h(\alpha)}$,

$$I=\pm\int\limits_{s_0(\alpha)}^{s}\sqrt{2(h(\alpha)-V(s))}\,ds \tag{18.19}$$

и

$$\beta=\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\pm\int\limits_{s_0(\alpha)}^{s}\frac{h'(\alpha)}{\sqrt{2(h(\alpha)-V(s))}}\,ds\mp\sqrt{2(h(\alpha)-V(s_0))}\cdot\frac{ds_0}{d\alpha}.$$

Впредь будем выбирать s_0 так, чтобы второе слагаемое обратилось в нуль, т. е. брать $s_0\equiv\mathrm{const}$ или $V(s_0(\alpha))\equiv h(\alpha)$. Итак, имеем (18) и

$$\beta=\pm h'(\alpha)\int\limits_{s_0(\alpha)}^{s}\frac{ds}{\sqrt{2(h(\alpha)-V(s))}}. \tag{18.20}$$

Это не очень удобные формулы. Во-первых, стоит $\pm$, т. е. получе-