но два отдельных решения в области $p \geqslant 0$, $p \leqslant 0$ (на этом можно остановиться только если $V(s) < h$ везде; см. рис. 45). Во-вторых, подынтегральная функция в формуле для β обращается в нуль на границе области возможности движения. В-третьих, в случае движения в потенциальной яме движение носит колебательный характер, т. е. p то больше, то меньше нуля, тогда как наши формулы пока что применимы лишь на коротком отрезке времени.

МЕТОД ВЕЙЕРШТРАССА

(глобальное решение в потенциальной яме)

Пусть мы имеем потенциальную яму с невырожденным минимумом s_* внутри (рис. 42). Если $h_* = V(s_*)$, то вместо V возьмем $V - h_*$, т. е. будем считать, что $V(s_*) = 0$. Пусть

$$\mathfrak{M}^h = [s_2(h),\ s_1(h)],\ 0 < h < \bar{h}.$$

Примем, что $V'(s) \neq 0$ на интервале $(s_2(\bar{h}),\ s_1(\bar{h}))$ за исключением точки s_*. Существует гладкая замена переменной $s = f(q)$ такая, что $V = q^2/2$ (лемма Морса, тема 6). Возьмем $s_0 = s_*$. Тогда

$$p_s = \pm \sqrt{2h - q^2},$$

$$\beta = \pm h'(\alpha) \int_0^{q(s)} \frac{f'(q)\, dq}{\sqrt{2h - q^2}}. \tag{18.21}$$

Положим теперь

$$q = \sqrt{2h} \sin \xi. \tag{18.22}$$

Эта замена «законна» на интервалах $(-\pi/2,\ \pi/2)$ или $(-3\pi/2,\ -\pi/2)$, на которых $\sin \xi$ — монотонная функция; при этом

$$dq = \pm \sqrt{2h - q^2}\, d\xi$$

соответственно. Кроме того,

$$p_s = \sqrt{2h} \cos \xi$$

больше нуля и меньше нуля также соответственно. От $\pm$ мы уже избавились. Имеем далее: функция

$$\beta = h'(\alpha) \int_0^{\xi} f'(\sqrt{2h} \sin \xi)\, d\xi = \Phi_{(\alpha\xi}(\xi)$$

монотонна и определена на всей прямой. Она имеет обратную

$$\xi = \Phi_\alpha^{-1}(\beta),$$

откуда $q = \sqrt{2h(\alpha)} \sin \Phi_\alpha^{-1}(\beta)$ и, наконец,

$$p_s = \sqrt{2h(\alpha)} \cos \Phi_\alpha^{-1}(\beta),$$

$$s = f(\sqrt{2h(\alpha)} \sin \Phi_\alpha^{-1}(\beta)).$$

Посмотрим теперь, что получится, если мы формально возьмем