ξ вне интервала $(-3\pi/2,\ \pi/2)$. Тогда $\xi = 2\pi n + \xi_1$, где ξ_1 принадлежит этому интервалу, а поскольку подынтегральная функция периодична, получаем

$$\beta = \Phi_\alpha(\xi_1) + nh'(\alpha) \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} f'(\sqrt{2h(\alpha)} \sin \xi)\, d\xi.$$

Таким образом, β изменится на $\chi(\alpha)$, что не выходит за рамки произвола, допускаемого в формулах перехода вообще.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ

Теперь мы можем воспользоваться возможностью подбирать $h(\alpha)$. Попробуем добиться того, что $\chi(\alpha) \equiv 2\pi$. Заметим, что

$$\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} f'(\sqrt{2h} \sin \xi)\, d\xi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f'(\sqrt{2h} \sin \xi)\, d\xi =$$

$$= 2 \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \frac{ds}{\sqrt{2(h - V(s))}} = 2 \frac{d}{dh} \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \sqrt{2(h - V(s))}\, ds = \frac{d}{dh} S(h).$$

Поэтому нам желательно получить $h'(\alpha) S'(h(\alpha)) \equiv 2\pi$. Будем искать не функцию $h(\alpha)$, а обратную к ней: $\alpha(h)$. Тогда $S'(h) = 2\pi\alpha'(h)$, так что нам достаточно взять

$$\alpha(h) = \frac{1}{\pi} \int_{s_1(h)}^{s_2(h)} \sqrt{2(h - V(s))}\, ds = \frac{1}{2\pi} S(h).$$

Величина α, определенная таким образом, называется «действие». Величина β, ей соответствующая, определена теперь с точностью до $2\pi n$ и поэтому называется «угол».

Пример. Гармонический осциллятор: $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{m} x^2$ (мы разделили на массу). Имеем сразу

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{k}{m}\frac{x^2}{2},$$

$$p_x = \frac{\partial I}{\partial x} = \pm \sqrt{2h(\alpha) - \frac{k}{m} x^2}.$$

Отсюда видим, что надо взять $x = f(q) = \sqrt{m/k}\, q$, тогда $f'(q) \equiv \equiv \sqrt{m/k}$. Полагая $x(\alpha) = \xi(\alpha) \equiv 0$, получим

$$\beta = \Phi_\alpha(\xi) = h'(\alpha) \sqrt{\frac{m}{k}}\, \xi.$$

Целесообразно положить

$$h'(\alpha) = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad h(\alpha) = \sqrt{\frac{k}{m}}\, \alpha.$$