Тогда $\beta=\xi$, и приходим к

$$x=\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{2h}\sin\beta,\quad p_x=\sqrt{2h}\cos\beta.$$

Общее решение получается в виде (14):

$$x=\sqrt[4]{\frac{m}{k}}\sqrt{2\alpha}\sin\left(\beta+\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

$$p_x=\sqrt[4]{\frac{k}{m}}\sqrt{2\alpha}\cos\left(\beta+\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(отметим, что здесь $p_x=\dot{x}$, а не $m\dot{x}$).

## ОТДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Если у нас задача со многими степенями свободы, то первым шагом применения метода Гамильтона—Якоби является сведение задачи к решению нескольких одномерных уравнений. Иногда это удается сделать сразу, иногда — поэтапно. Продемонстрируем общую идею самого распространенного приема. Пусть в выражении гамильтониана отделяются переменные $p_1,\dots,p_k$, $q_1,\dots,q_k$:

$$H=\tilde{H}(f(p_1,\dots,p_k,\ q_1,\dots,q_k),\ p_{k+1},\dots,p_n,\ q_{k+1},\dots,q_n,\ t).$$

тогда полный интеграл можно искать в виде

$$S=F(q_1,\dots,q_k,\ \alpha_1,\dots,\alpha_k)+\tilde{S}(q_{k+1},\dots,q_n,\ \alpha_1,\dots,\alpha_n,\ t)$$

(не утверждается, что он обязательно имеет такой вид!), где функции $F$ и $\tilde{S}$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона—Якоби

$$f\left(\frac{\partial F}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial q_k},q_1,\dots,q_k\right)=\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_k),$$

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}+\tilde{H}\left(\chi(\alpha_1,\dots,\alpha_k),\ \frac{\partial\tilde{S}}{\partial q_{k+1}},\dots,\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q_n},\ q_{k+1},\dots,q_n,t\right)=0.$$

Это можно сочетать с исключением времени (при $\partial H/\partial t\equiv 0$ переменная $t$ в уравнении Гамильтона—Якоби тоже в некотором смысле отделяется).

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу Кеплера $(m=1)$:

$$L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{\mu}{r},\quad H=\frac{p_r^2}{2}+\frac{p_\varphi^2}{2r^2}-\frac{\mu}{r}.$$

Здесь отсутствует время и отделяются переменные $p_\varphi$, $\varphi$: $f\equiv p_\varphi$. Положим $\chi(\alpha_2)=\alpha_2$, $h(\alpha)=\alpha_1$,

$$S=F(\varphi,\ \alpha_2)-\alpha_1 t+\tilde{S}(r,\ \alpha_1,\ \alpha_2).$$

Тогда $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}=\alpha_2\Rightarrow F=\alpha_2\varphi$ и

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_2^2}{2r^2}-\frac{\mu}{r}=\alpha_1,$$