$$\tilde{I} = \pm \int\limits_{r(\alpha)}^{r} \sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}\, dr,$$

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 \varphi \pm \int\limits_{r(\alpha)}^{r} \sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}\, dr.$$

По теореме Якоби (минуя формулы перехода) общее решение уравнения движения находится из

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_2,\ p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm \sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\frac{\mu}{r}},$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{\mu}{r}}},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \varphi \pm \int -\frac{\alpha_2}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}}.$$

Проведем анализ последней формулы. Подкоренное выражение представим в виде, полагающемся по методу Вейерштрасса:

$$2\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1 + \frac{\mu^2}{\alpha_2^2} - \left(\frac{\alpha_2}{r} - \frac{\mu}{\alpha_2}\right)^2.$$

Обязательно должно быть $2\alpha_2 + \mu^2/\alpha_2^2 \geqslant 0$. Положим

$$q = \frac{\alpha_2}{r} - \frac{\mu}{\alpha_2},\ r = \frac{\alpha_2}{\frac{\mu}{\alpha_2} + q}.$$

Интегрировать удобно от $r_{\min}$, $q_{\max}$. Заметим, что $-\frac{\alpha_2}{r^2} dr = dq$, так что наш интеграл приобретает вид

$$\beta_2 = \varphi \pm \int\limits_{q_{\max}}^{q} \frac{dq}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{\mu^2}{\alpha_2^2} - q^2}},$$

и после замены $q = \sqrt{2\alpha_1 + \mu^2/\alpha_2^2}\, \sin \xi$ приходим к $\beta = \varphi + \xi - \pi/2$. Поэтому

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \beta - \varphi,\ q = \sqrt{2\alpha_1 + \frac{\mu}{\alpha_2^2}}\, \cos(\varphi - \beta_2),$$