ЧАСТЬ II

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КУРС

Классическая динамика родилась и выросла в эпоху, когда астрономия, математика, механика и физика были единой наукой; последним олицетворением этого единства был А. Пуанкаре. Сейчас на классическую динамику смотрят как на модель многочисленных реальных движений, собственное лицо которой вырисовывается на фоне красивого переплетения ряда математических дисциплин.

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

В плоскости $\mathbf{R}^2(x, y)$ с течением времени t перемещается точка массы m (желая сохранить естественную размерность величин, мы не будем торопиться с тривиальным упрощением $m=1$).

ЗАКОН НЬЮТОНА определяет движения точки

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\ y(t))$$

как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых считаются заданными и достаточно гладкими:

$$m\ddot{x} = X(\dot{x},\ \dot{y},\ x,\ y,\ t),\quad m\ddot{y} = Y(x,\ y,\ x,\ y,\ t). \tag{1.1}$$

Более коротко в векторном виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}},\ \mathbf{r},\ t).$$

Вектор $\mathbf{F} = (X, Y)$ называется *силой*. Принято $\mathbf{r}$ называть *положением* точки, пару $(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ — *состоянием*. Движение однозначно определяется начальным состоянием $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ в мгновение $t=t_0$.

Чаще всего $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Тогда если $\mathbf{r}(t)$ — движение, то и $\mathbf{r}(t+\tau)$ — движение (поскольку $\mathbf{F}$ не зависит от t) и $\mathbf{r}(-t)$ — тоже движение (поскольку $\mathbf{F}$ не зависит от $\dot{\mathbf{r}}$) с начальным состоянием $\mathbf{r}_0$, $-\dot{\mathbf{r}}_0$. Иначе говоря, *движения допускают сдвиг и инверсию времени.* Можно считать $t_0=0$. Множество, на котором определена вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, есть некоторая область $\mathfrak{U} \subset \mathbf{R}^2$; обычно это $\mathbf{R}^2$ целиком или $\mathbf{R}^2$ без нескольких точек. Явно указывать область определения и степень гладкости $\mathbf{F}$ (пусть C^∞ для простоты) не принято.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. *Интегралом движения,* или *первым интегралом*, называется функция $\Phi(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ такая, что для всех движений $\Phi(\dot{\mathbf{r}}(t),\ \mathbf{r}(t)) = f = \mathrm{const}$. Другими словами, тождественно