равна нулю ее полная производная в силу системы (1):

$$\frac{d\Phi}{dt}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}\right)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\mathbf{r}}},\frac{1}{m}\mathbf{F}\right)\equiv 0. \qquad (1.2)$$

Интеграл у нас по определению не зависит от времени. Это не обязательно, но удобно для дальнейшего. Задачи с интегралами, содержащими t, встречаются редко.

Простейшие типы первых интегралов. Приведем три простых утверждения, идейное наполнение которых прояснится позднее.

А. *Интеграл импульса:*

$$X\equiv 0\Rightarrow J_1=m\dot{x}=mc=\text{const}.$$

Б. *Интеграл кинетического момента:*

$$xY-yX\equiv 0\Rightarrow J_2=m(x\dot{y}-y\dot{x})=mc=\text{const}.$$

В. *Интеграл энергии:*

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x},\ Y=-\frac{\partial V}{\partial y}\Rightarrow H=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+V(x,y)=h=\text{const}.$$

Функция $V(x, y)$ называется *потенциалом*, или *потенциальной энергией*, функция $T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ — *кинетической энергией.*

ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ. Постоянная f в определении первого интеграла обычно задается начальным состоянием. Но не исключено, что f будет задана из каких-либо других соображений и потребуется узнать, где могут происходить движения с этим значением f первого интеграла Ф. Это и есть *область возможности движения:*

$$\mathfrak{M}^f=\{\mathbf{r}:\exists\dot{\mathbf{r}},\ \Phi(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{r})=f\}. \qquad (1.3)$$

Весьма выразительно описание ее в случае интеграла энергии. Поскольку кинетическая энергия неотрицательна,

$$\mathfrak{M}^h=\{V(\mathbf{r})\leqslant h\}, \qquad (1.4)$$

т. е. является суб-уровнем потенциальной энергии (проверить по определению (3)).

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ. *Траекторией движения* $\mathbf{r}(t)$ называется множество положений, которые точка последовательно занимает с течением времени (t пробегает максимальный интервал определения $\mathbf{r}(t)$, содержащий t_0). Чтобы получить уравнение траектории или ее части в виде $\chi(x, y)=0$, в принципе надо из формул движения $x=x(t)$, $y=y(t)$ исключить t.

Множеству достижимости $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ для начала дадим приблизительное определение: это все точки, в которые можно попасть из точки $\mathbf{r}_0$ с начальной скоростью v_0 (заданной по модулю).

Пример. Построить траектории, множества $A^{v_0}(r_0)$ и области $\mathfrak{M}^h$ для точки в поле тяжести: $\mathbf{F}=-mg\mathbf{e}_y$, $V=mgy$.

Решение. Общее решение уравнений движения имеет вид

$$x=x_0+\dot{x}_0t,\quad y=y_0+\dot{y}_0t-gt^2/2.$$