Положив $x_0=y_0=0$ (не уменьшая общности), $\dot x_0=v_0\cos\theta$, $\dot y_0=$ $=v_0\sin\theta$, при $\dot x_0\neq 0$ получим уравнение траекторий: это параболы

$$y=v_0\operatorname{tg}\theta\cdot x-\frac{h}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2.$$

При $\dot x_0=0$ траектория вырождается в полупрямую. «Кривая достижимости за время t» имеет вид $x^2+(y+gt^2/2)^2=v_0{}^2t^2$. Это окружность с падающим по вертикали центром и линейно растущим радиусом. Строим огибающую этого семейства окружностей и получаем ответ: множество достижимости

$$A^{v_0}(0,0)=\left\{y\leqslant\frac{v_0^2}{2g}-\frac{x^2}{2v_0^2/g}\right\}$$

лежит под *параболой безопасности* (рис. 56), вершина которой находится на границе области возможности движения:

$$\mathfrak{M}^h=\left\{y\leqslant\frac{h}{mg}\right\},\quad h=\frac{mv_0^2}{2}+mgy_0.$$

Замечание. В задачах с интегралом энергии $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)\subset\mathfrak{M}^h$, где $h=\dfrac{mv_0^2}{2}+V(\mathbf{r}_0)$. В случае компактности области $\mathfrak{M}^h$ множество $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ обязательно имеет общие точки с ее границей (см. § 6).

Задача 1. Выписать интегралы движения, построить траектории и множества $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ для гармонического осциллятора:

$$\mathbf{F}=-\varkappa\mathbf{r},\ V=\frac{\varkappa}{2}(x^2+y^2),\quad \varkappa>0.$$

Для простоты пусть $y_0=0$. Как $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ расположено в $\mathfrak{M}^h$? Ответ:

$$A^{v_0}(x_0,0)=\left\{\frac{x^2\omega^2}{x_0^2\omega^2+v_0^2}+\frac{y^2\omega^2}{v_0^2}\leqslant 1\right\},$$

$$\mathfrak{M}^h=\left\{x^2+y^2\leqslant\frac{2h}{\varkappa}\right\},\ h=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{\varkappa x_0^2}{2};\ \omega=\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}.$$

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. *Пусть движение обладает интегралом*

$$J=m(\varphi(x,\ y)\dot x+\psi(x,\ y)\dot y)\not\equiv 0,$$

который линеен по скоростям. Тогда в некоторой декартовой системе координат ξ, η *интеграл* J *записывается в одной из следующих форм* (с точностью до постоянного множителя):

(А) $J=m\dot\xi$,

(Б) $J=m(\xi\dot\eta-\eta\dot\xi)$,

т. е. совпадает с интегралом импульса или момента.