Доказательство. Приравняв к нулю полную производную J, получим систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\quad \varphi X+\psi Y=0,$$

которая легко решается:

$$\varphi=ay+b,\ \psi=-ax+c.$$

При $a=0$ имеем первый случай, при $a\neq0$ — второй.

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ. *Множество* $A^{v_0}(\mathbf{r}_0)$ *равно замыканию объединения траекторий всех движений, проходящих через* $\mathbf{r}_0$ *со скоростью* v_0:

$$A^{v_0}(\mathbf{r}_0)=\overline{\bigcup_{|v_0|=v_0}\sigma(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}.$$

Пример. Бигармонический осциллятор:

$$\mathbf{F}=(-\alpha x,\ -\beta y),\quad V=\frac{1}{2}(\alpha x^2+\beta y^2),\quad \alpha,\beta>0.$$

Из закона Ньютона $m\ddot{x}=-\alpha x$, $m\ddot{y}=-\beta y$ получаем

$$x=x_0\cos\omega_1 t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t,$$

$$y=y_0\cos\omega_2 t+\frac{\dot{y}_0}{\omega_2}\sin\omega_2 t,$$

где величины $\omega_1=\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$, $\omega_2=\sqrt{\frac{\beta}{m}}$ — *частоты* колебаний по соответствующей координате. Имеется интеграл энергии

$$H=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}(\alpha x^2+\beta y^2)=h.$$

Область $\mathfrak{M}^h$ — эллипс с полуосями $a=\sqrt{2h/\alpha}$, $b=\sqrt{2h/\beta}$. Наряду с H имеются еще интегралы

$$\Phi_1=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\alpha x^2=c_1,\quad \Phi_2=\frac{m}{2}\dot{y}^2+\frac{1}{2}\beta y^2=c_2.$$

Эти интегралы *квадратичны по скоростям*. Поскольку $\Phi_1+\Phi_2=H$, будем пользоваться только ими. Заметим, что область возможности движения при условии, что заданы две константы,

$$\mathfrak{M}^{c_1c_2}=\left\{|x|\leqslant\sqrt{\frac{2c_1}{\alpha}};\ |y|\leqslant\sqrt{\frac{2c_2}{\beta}}\right\}$$

является прямоугольником, вписанным в эллипс $\mathfrak{M}^h$, $h=c_1+c_2$.

1. Пусть ω_1/ω_2 — рациональное число. В этом случае у колебаний вдоль координатных осей есть общий период: все траектории замкнуты.