2. Пусть число ω_1/ω_2 иррационально. Тогда все траектории незамкнуты и любая из них заполняет $\mathfrak{M}^{c_1c_2}$ всюду плотно:

$$\mathfrak{M}^{c_1c_2} = \overline{\varsigma(\mathbf{r}_0, v_0, \theta)} = \left\{ |x| \leqslant \sqrt{\frac{2c_1}{\alpha}};\ |y| \leqslant \sqrt{\frac{2c_2}{\beta}} \right\} =$$

$$= \begin{cases} |x| \leqslant \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{\alpha} v_0^2 \cos^2\theta}, \\ |y| \leqslant \sqrt{y_0^2 + \frac{m}{\beta} v_0^2 \sin^2\theta}, \end{cases}$$

где $\varsigma(\mathbf{r}_0, v_0, \theta)$ — траектории точки, выпущенной со скоростью v_0 из точки $\mathbf{r}_0$ под углом θ к оси абсцисс. Вообще замыкание объединения множеств равно замыканию объединения замыканий этих множеств. Поэтому множество достижимости

$$A^{v_0}(\mathbf{r}_0) = \overline{\bigcup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \varsigma(\mathbf{r}_0, v_0, \theta)} = \overline{\bigcup \overline{\varsigma(\mathbf{r}_0, v_0, \theta)}}$$

есть объединение однопараметрического (по θ) семейства прямоугольников (рис. 57). В общем случае это криволинейный восьмиугольник — пересечение эллипса $\mathfrak{M}^h$ с полосами:

$$\left\{ |x| \leqslant \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{\alpha} v_0^2} \right\};\quad \left\{ |y| \leqslant \sqrt{y_0^2 + \frac{m}{\beta} v_0^2} \right\}.$$

Вопросы. Где находится начальная точка (x_0, y_0)? Во что может вырождаться восьмиугольник?

Задача 2. Показать, что если потенциал $V = \alpha x^2/2$, $\alpha > 0$, то множества достижимости совпадают с областями возможности движения.

§ 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ СИЛ В ПЛОСКОСТИ

Пусть $xY - yX \equiv 0$, т. е. $\mathbf{F} \| \mathbf{r}$. При $\mathbf{r} \neq 0$ положим $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Будем писать $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_r$, так что F здесь — модуль силы с некоторым знаком (минус в случае притягивающей силы). Введем полярные координаты (рис. 50):

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{matrix}$$

После дифференцирований

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

По структуре это — формулы пересчета компонент векторов скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{a}$ в репер $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, повернутый на угол φ про-