тив часовой стрелки. Следовательно,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

а закон Ньютона принимает вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F, \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0.$$

Это система уравнений второго порядка с неизвестными функциями $r(t)$, $\theta(t)$. Интеграл кинетического момента

$$J = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} = \frac{m}{2}\frac{dS}{dt} = mc = \text{const},$$

где S — площадь, заметаемая вектором $\mathbf{r}(t)$ (отсюда равносильный термин «интеграл площадей»), рис. 50.

При $c=0$ имеем движение по прямой $\varphi=\text{const}$. При $c\neq 0$ (для определенности пусть $c>0$) функция $\varphi=\varphi(t)$ монотонна (возрастает), имеет обратную, и потому траекторию движения $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ целесообразно задавать в виде $r=r_*(\varphi)$.

ФОРМУЛЫ КЛЕРО. Пусть $r=r_*(\varphi)$ траектория движения с постоянной площадей $c\neq 0$. Тогда скорость движения $v(t)$ и действующую силу $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ тоже можно выразить через φ. После этого будут справедливы формулы

$$v^2 = c^2\left(\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2\right), \quad F = -mc^2\rho^2\left(\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho\right); \quad \rho = \frac{1}{r_*(\varphi)}.$$

Для доказательства надо выполнить замену переменных t на φ, r на ρ в выражениях

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad F = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2).$$

Пользуясь тем, что в силу интеграла площадей

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{d}{d\varphi},$$

приходим к

$$v^2 = c^2\left(\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right), \quad F = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) - \frac{1}{r}\right],$$

после чего остается перейти к ρ.

ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r, \varphi)\mathbf{e}_r$ — *центральное силовое поле. Оно потенциально тогда и только тогда, когда функция* F *не зависит от* φ, *а потенциал*

$$V(x, y) = V(\sqrt{x^2+y^2}), \quad V(r) = -\int F\,dr.$$

Для доказательства заметим, что выражение $Xdx + Ydy = Fdr$ должно быть полным дифференциалом.