Всюду ниже центральное поле считается потенциальным. Интеграл энергии предста́вим в виде

$$K=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)+V(r)=h.$$

Если зафиксированы константы c и h, то область возможности движения $\mathfrak{M}_c^h$ (определение аналогично) дается формулой

$$\mathfrak{M}_c^h=\left\{r: V(r)+\frac{mc^2}{2r^2}\leqslant h\right\}. \tag{2.1}$$

Функция $V_c=V+\frac{mc^2}{2r^2}$ называется *приведенным потенциалом.*

Лемма 2. *В центральном поле сил с потенциалом $V(r)$ рассмотрим движение с постоянной площадей c. Тогда функции $r(t)$, $\rho_*(\varphi)$ удовлетворяют соответственно уравнениям*

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{d}{dr}V_c(r), \tag{2.2А}$$

$$m\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=-\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\rho}V_c\left(\frac{1}{\rho}\right),\quad c\neq 0. \tag{2.2Б}$$

Это выводится из закона Ньютона и второй формулы Клеро.

Обратим внимание на связь, которая существует между формулами (1) и (2). Множество $\mathfrak{M}_c^h$ состоит, вообще говоря, из нескольких колец, включая варианты, когда кольцо имеет нулевой или бесконечный радиус (рис. 52). Число этих колец меняется (происходит перестройка $\mathfrak{M}_c^h$), когда h пересекает критическое значение приведенного потенциала $h_i^*=V_c(r_i^*)$, где r_i^* — критическая точка V_c: $\left.\frac{dV_c}{dr}\right|_{r_i^*}=0$. А из формулы (2) видно, что критическим точкам V_c соответствуют простейшие из центральных движений, так называемые относительные равновесия $r(t)=$ $=r_i^*$ или $\rho_*(\theta)=\rho_i^*$. При этом энергия этих движений, как легко проверить, равна в точности соответствующему значению h_i^*.

Поясним термин «приведенный потенциал». Смысл леммы 2 состоит в том, что от двух уравнений движения второго порядка (закон Ньютона в плоскости — формулы (1) из § 1) мы перешли к одному уравнению. Здесь мы имеем частный случай общего приведения по Раусу (см. ниже § 15), где и возникают соответствующие общие объекты, в том числе приведенный потенциал.

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА. Пусть точка притягивается к началу координат согласно закону обратных квадратов:

$$\mathbf{F}=-\frac{\mu m}{r^2}\mathbf{e}_r;\quad V=-\frac{\mu m}{r}.$$

Классифицируем области возможности движения и траектории. Пусть $2h=mk$. Области $\mathfrak{M}_c^k$ находятся из неравенства

$$-\frac{2\mu}{r}+\frac{c^2}{r^2}\leqslant k.$$