Единственная критическая точка у функции слева (фактически у приведенного потенциала) есть $r^* = c^2/\mu$, критическое значение $k^* = -\mu^2/c^2$. Нарисовав график, легко убедиться, что $\mathfrak{M}_c^k$ есть внешность круга (взятая с границей) при $k \geqslant 0$, кольцо при $k^* < k < 0$, окружность при $k = k^*$, пустое множество при $k < k^*$. Перейдем к траекториям. Поскольку

$$V_c\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\mu m \rho - \mu\frac{c^2\rho^2}{2},$$

выписываем уравнение (2Б) и сразу решаем его:

$$m\rho'' + m\rho = \mu m/c^2,$$

$$\rho = \mu/c^2 + A\cos(\varphi - \hat{\varphi}).$$

Здесь A, $\hat{\varphi}$ — произвольные постоянные. В силу интеграла энергии и первой формулы Клеро

$$v^2 = k + 2\mu\rho,$$

$$c^2\left(\frac{\mu^2}{c^4} + 2\frac{\mu A}{c^2}\cos(\varphi - \hat{\varphi}) + A^2\right) = k + 2\mu\left(\frac{\mu}{c^2} + A\cos(\varphi - \hat{\varphi})\right),$$

откуда $c^2A^2 = k + \mu^2/c^2$ и, наконец,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \hat{\varphi})}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = Ap = \sqrt{1 + \frac{kc^2}{\mu^2}}.$$

Траектории суть гиперболы при $e > 1$ ($k > 0$), параболы при $e = 1$ ($k = 0$), эллипсы при $0 \leqslant e < 1$ ($k^* \leqslant k < 0$), превращающиеся в окружности при $e = 0$ ($k = k^*$). Все это — конические сечения с фокусом в начале координат. При $\varphi = \hat{\varphi}$ имеем направление на перицентр — ближайшую к началу координат точку орбиты.

Эллиптические орбиты можно задать уравнением

$$|\mathbf{r}| + |\mathbf{r} - \mathbf{s}| = 2a, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{s}$ — радиус-вектор второго фокуса, a — большая полуось эллипса:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = -\frac{\mu}{k},$$

зависящая только от полной энергии.

Обратим внимание также на смысл величины p: она равна радиусу r^* круговой орбиты с данной постоянной площадей c. На эллиптической орбите точка достигает этого расстояния, будучи на угловом расстоянии от перицентра $\varphi - \hat{\varphi} = \pm\pi/2$.

Величина e называется эксцентриситетом (ea есть расстояние между фокусом и центром эллипса).

ЭЛЛИПС БЕЗОПАСНОСТИ. Построим множества достижимости в задаче Кеплера при $k < 0$. Можно зафиксировать эту константу вместо начальной скорости или, что равносильно, большую полуось траектории. Имеем из (3)

$$|\mathbf{r}_0| + |\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}| = 2a.$$