Сложив с (3), получаем

$$|\mathbf{r}|+|\mathbf{r}_0-\mathbf{s}|+|\mathbf{r}-\mathbf{s}|=4a-|\mathbf{r}_0|.$$

Поскольку

$$|\mathbf{r}_0-\mathbf{s}|+|\mathbf{r}-\mathbf{s}|\geqslant|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|, \tag{2.4}$$

выводим, что

$$|\mathbf{r}|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\leqslant 4a-|\mathbf{r}_0|, \tag{2.5}$$

т. е. множество достижимости лежит внутри (5). Равенство как частный случай неравенства (4) реализуется на каждой траектории (прямая, проведенная через $\mathbf{r}_0$ и второй фокус $\mathbf{s}$, пересекает эллипс еще в одной точке). Следовательно, неравенство (5) определяет множество достижимости. Его граница

$$\{|\mathbf{r}|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=4a-|\mathbf{r}_0|\}$$

и называется *эллипсом безопасности.*

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ. Пусть h некритическое значение приведенного потенциала V_c; рассмотрим движения, происходящие в связной компоненте $\mathfrak{M}_c^h$ типа кольца:

$$r_1(h)\leqslant r\leqslant r_2(h),\quad \rho_2(h)\leqslant\rho\leqslant\rho_1(h).$$

Из первой формулы Клеро или леммы 2

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\pm\sqrt{\frac{2}{mc^2}\left(h-V_c\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)}\,. \tag{2.6}$$

В этой формуле надо брать определенный знак, пока подкоренное выражение не обратится в нуль. При этом движение выходит на границу $\mathfrak{M}_c^h$, затем $d\rho/d\varphi$ меняет направление изменения и следует взять уже противоположный знак. Таким образом, функция $\rho_*(\varphi)$ получается периодической, а траектории, например, такими, как на рис. 52. Величина

$$\Phi_{ch}=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\left[\frac{2}{mc^2}\left(h-V_c\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\right]^{-1/2}d\rho$$

называется апсидальным углом. Траектории замкнуты, когда Φ_{ch}/π — рациональное число; в противном случае они всюду плотно заметают кольцо. В задаче Кеплера $\Phi_{ch}\equiv\pi$, для гармонического осциллятора $\Phi_{ch}\equiv\pi/2$. Других задач с постоянным апсидальным углом не существует.

Когда $r_1=0$ или $r_2=\infty$, движения не возвращаются близко к исходной точке и потому менее интересны. Хорошее представление о них дает

Задача 3. Классифицировать области возможности движения, траектории, вычислить апсидальный угол, когда потенциал $V=-\mu m/r+\nu m/2r^2$. Часть ответа: решение при $1+\nu/c^2>0$ имеет