Легко видеть, что

$$r \geqslant r_\pi = \frac{p}{1+e},$$

причем минимум достигается при $\theta=0$, так что вектор $\mathbf{\Phi}$ направлен в *перицентр* орбиты.

§ 4. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО КРИВОЙ

Пусть $\mathfrak{M}$ — одномерное подмногообразие в $\mathbf{R}^2$. Оно может быть задано двумя способами:

1) уравнением $f(x, y)=0$, причем $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Big|_{\mathfrak{M}} \neq 0$.

2) параметрически: $x=x(q)$, $y=y(q)$, причем $\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 \neq$ $\neq 0$.

Эти способы локально равносильны теореме о неявной функции. Задание в виде графика функции, например, $y=\varphi(x)$ относится к обоим способам сразу ($y-\varphi(x)=0$ или $y=\varphi(q)$, $x=q$).

Особую роль играет *натуральный параметр* s (алгебраическая длина дуги). Если $r(q)$ — некоторая параметризация, то

$$s(q) = \int_{q_0}^{q} |\mathbf{r}'(q)|\, dq = \int_{q_0}^{q} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

монотонная функция q. Она имеет обратную $q(s)$; зависимость $\mathbf{r}=\mathbf{r}(q(s))$ называется натуральной параметризацией $\mathfrak{M}$.

В каждой точке $\mathfrak{M}$ определен *репер Френе (естественный репер)*:

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{e}_\nu = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1}.$$

Очевидно, $\{\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\nu\}$ — ортонормированный репер (в ортогональности $\mathbf{e}_\tau$ и $\mathbf{e}_\nu$ можно убедиться, продифференцировав тождество $(\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\tau)=1$). Величина $|d^2\mathbf{r}/ds^2|=k(s)$ называется кривизной в точке $\mathbf{r}(s)$, величина $\rho=1/k$ называется радиусом кривизны. При перемещении по кривой скорость и ускорение

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{e}_\tau, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_\nu.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая кривая, заданная в $\mathbf{R}^2$ уравнением $f(x, y)=0$. Допустим, что точка обязана двигаться только по $\mathfrak{M}$ (говорят, что на нее *наложена связь*). Пусть в окрестности $\mathfrak{M}$ или только вдоль $\mathfrak{M}$ задана сила $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$. Отображение $\mathbf{r}(t)\to\mathfrak{M}$ называется *движением*, если для него существует переменный вектор $\mathbf{R}(t)$, ортогональный к кривой в точке $\mathbf{r}(t)$ такой, что выполняется тождество (закон Ньютона)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \tag{4.1}$$