Вектор $\mathbf{R}$ называется *силой реакции связи* при движении $\mathbf{r}(t)$. Эквивалентное определение составляет принцип Даламбера—Лагранжа: перемещение $\mathbf{r}(t)$ есть движение тогда и только тогда, когда для любого касательного к кривой вектора $\boldsymbol{\tau}$ в точке $\mathbf{r}(t)$

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F},\ \boldsymbol{\tau}) = 0. \tag{4.2}$$

Вместо (1) можно написать *уравнения с множителем Лагранжа*:

$$m\ddot{x} = X + \varkappa \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$m\ddot{y} = Y + \varkappa \frac{\partial f}{\partial y};$$

к этой системе надо присоединить уравнение $f(x, y) = 0$, *и получим систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями времени* $x(t)$, $y(t)$, $\varkappa(t)$. Движение не изменится, если к $\mathbf{F}$ прибавить некоторую силу, ортогональную к кривой.

Разложив векторное равенство (1) по векторам естественного репера, можно найти формулу движения $s = s(t)$ из уравнения

$$m\ddot{s} = F_\tau(\dot{s}, s, t), \tag{4.3}$$

а потом вычислить силу реакции из

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\nu + R\,(\mathbf{R} = R\mathbf{e}_\nu). \tag{4.4}$$

Заметим, что, даже не решая уравнение (3), R всегда можно вычислить как функцию состояния: $R = -F_\nu + \dfrac{mv^2}{\rho}$ (зависимость от скорости квадратичная, если $F_\nu = F_\nu(s)$).

ЕСЛИ СИЛА ПОТЕНЦИАЛЬНА, *имеется интеграл энергии*

$$H = {}^1/_2 mv^2 + V = h \tag{4.5}$$

как для свободных движений в плоскости, так и для движения при наличии связи. В последнем случае V обозначает сужение потенциала $V(x, y)$ на кривую: $V(s) = V(x(s), y(s))$. Тогда

$$F_\tau(s) = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_\tau) = -\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{dy}{ds} = -\frac{dV}{ds}.$$

Реакция вычисляется как функция энергии и положения:

$$R^h(s) = -F_\nu(s) + \frac{2}{\rho}(h - V(s)).$$

Задача 5. Рассмотрим движение точки, подвешенной на нити. Начальное условие: точка находится в крайнем нижнем положении, начальная скорость горизонтальна и по модулю равна v_0. Определить границы возможности движения.

Это задача на движение с односторонней связью $x^2 + y^2 - r^2 \leqslant 0$ (r — длина нити). Другими словами, нить не может порваться, но может ослабнуть. Граница возможности движения определяется следующими условиями:

а) либо скорость обратится в нуль и точка пойдет назад;

б) либо тем, что ослабнет нить и точка покинет окружность.