Иначе говоря, надо выписать и решить два неравенства:

$$(*)\, V \leqslant h, \quad (**)\, R_h \geqslant 0,$$

где h определяется начальными условиями. Имеем: радиус кривизны $\rho = r$, натуральный параметр $s = r\varphi$ (рис. 5). Ответ:

1) если $v_0 \leqslant \sqrt{2gr}$, то неравенство $(*)$ сильнее, чем $(**)$: в результате будут колебания в нижней полуокружности;

2) если $v_0 \in (\sqrt{2gr}, \sqrt{5gr})$, то $(**)$ сильнее, чем $(*)$, т. е. нить ослабнет в верхней полуокружности;

3) если $v_0 > \sqrt{5gr}$, то получим вращение точки по окружности.

Вопрос. Что будет при $v_0 = \sqrt{5gr}$?

Задача 6. Выписать и решить уравнение $m\ddot{s} = F_\tau(s)$ для движения точки в поле силы тяжести по циклоиде (рис. 29):

$$x = \frac{a}{2}(\varphi + \sin\varphi), \quad y = -\frac{a}{2}(1 + \cos\varphi).$$

Ответ: $\ddot{s} = -g/2a$ (гармонические колебания).

УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА. Пусть $q(t)$ — закон движения точки по кривой $r(q)$. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} A(q)\dot{q}^2, \quad A(q) = m\left(\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2\right) = m\left(\frac{ds}{dq}\right)^2.$$

Пусть поле силы F потенциально, вдоль кривой потенциал $V(q) = V(x(q), y(q))$. Составим *функцию Лагранжа*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} A(q)\dot{q}^2 - V(q) \tag{4.6}$$

и предложим своему вниманию осколок общей теории (см. § 16).

Теорема. *Зависимость $q = q(t)$ для движения по кривой в потенциальном поле сил удовлетворяет уравнению Лагранжа вида*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{4.7}$$

Имеет место интеграл энергии

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} A(q)\dot{q}^2 + V(q). \tag{4.8}$$

Доказательство. На левую часть (7) надо смотреть, как на процедуру выписывания некоторого дифференциального уравнения второго порядка, а именно (после выкладок в случае (6)) такого:

$$A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} A'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0. \tag{4.9}$$

Это уравнение эквивалентно $m\ddot{s} = F_\tau$, поскольку

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{A(q)}{m}}\,\dot{q}, \quad \ddot{s} = \frac{A'(q)\dot{q}^2}{2\sqrt{mA(q)}} + \sqrt{\frac{A(q)}{m}}\,\ddot{q}, \quad F_\tau = -\sqrt{\frac{m}{A(q)}}\,\frac{dV}{dq}.$$