Уже известный факт существования интеграла энергии ((8) есть (5), выраженное через $\dot{q}$, q) можно получить заново ((9), умноженное на $\dot{q}$, есть dH/dt). Отметим, что интеграл энергии H отличается от лагранжиана L знаком перед $V(q)$.

ОКРЕСТНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. Точка q_0 называется положением равновесия, если движение с начальным состоянием q_0, $\dot{q}_0=0$ имеет вид $q(t)\equiv q_0$.

Лемма. *Точка q_0 — положение равновесия тогда и только тогда, когда $V'(q_0)=0$*, т. е. *q_0 — критическая точка,* см. (9).

Не уменьшая общности, можно считать $q_0=0$. Осуществим линеаризацию уравнения Лагранжа. Для простоты сделаем это нестрого (но правильно). Будем считать, что функции $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ малы одновременно, а их квадратами, попарными произведениями (и так далее) можно пренебречь. Тогда средний член в (9) отбросится сразу, а с учетом разложений Тейлора

$$A(q)=A(0)+\alpha(q)q,\quad V'(q)=V''(0)q+\beta(q)q^2,$$

получим линеаризованное уравнение в виде

$$A(0)\ddot{q}+V''(0)q=0. \tag{4.10}$$

Если $V''(0)>0$, т. е. V имеет минимум в положении равновесия, то

$$q(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,\quad \omega=\sqrt{\frac{V''(0)}{A(0)}}.$$

Это — «малые колебания» с частотой ω.

Если $V''(0)<0$, т. е. V имеет максимум, то

$$q(t)=C_1e^{\lambda t}+C_2e^{-\lambda t},\quad \lambda=\sqrt{-\frac{V''(0)}{A(0)}}.$$

Это — «экспоненциальный уход» с показателем λ.

Если $V''(0)=0$, то первое приближение не представляет ценности и не позволяет судить о поведении точных решений уравнений Лагранжа (ср. с теоремами о линеаризации в курсе дифференциальных уравнений).

Задача 7. Доказать, что частота малых колебаний в окрестности нижней точки вертикальной кривой (в поле силы тяжести) равна $\sqrt{g/\rho}$, где ρ — радиус кривизны кривой в этой точке.

§ 5. ДВИЖЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ

Двумерное подмногообразие (поверхность) в $\mathbf{R}^3$ можно задать двумя локально эквивалентными способами:

1) уравнением: $\mathfrak{M}=\{(x,y,z): f(x,y,z)=0\}$, причем

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)\neq 0\,\Big|_{\mathfrak{M}};$$

2) параметрически: $\mathfrak{M}=\{x=x^*(q_1,\ q_2),\ y=y^*(q_1,\ q_2),\ z=z^*(q_1,$