$q_2)\}$, причем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial q_1} & \frac{\partial y^*}{\partial q_1} & \frac{\partial z^*}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x^*}{\partial q_2} & \frac{\partial y^*}{\partial q_2} & \frac{\partial z^*}{\partial q_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathfrak{M}} = 2.$$

Перемещение по поверхности задается либо тремя функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, удовлетворяющими связи: $f(x(t),\ y(t),\ z(t))=0$, либо двумя функциями $q_1(t)$, $q_2(t)$, тогда $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}^*(q_1(t),\ q_2(t))$. Соответственно скорость $\mathbf{v}=(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\mathbf{r}(t)}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\mathbf{r}(t)}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{\mathbf{r}(t)}\dot{z}=0$$

или же

$$\mathbf{v}=\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\dot{q}_2;$$

векторы $\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_i}$ составляют базис плоскости $T_{\mathbf{r}}(\mathfrak{M})$, касательной к $\mathfrak{M}$ в точке $\mathbf{r}$. Поверхность $\mathfrak{M}$ называется *многообразием положений*, а множество всех возможных пар $(\dot{\mathbf{r}},\ \mathbf{r})$ при перемещении по $\mathfrak{M}$ — *многообразием состояний*:

$$T(\mathfrak{M})=\{(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{r})\}=\Big\{\dot{x},\dot{y},\dot{z};\ x,y,z\ \vdots\ f(x,y,z)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=0\Big\}\subset \mathbf{R}^6.$$

Пространство $\mathbf{R}^6(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ x,\ y,\ z)$ — многообразие состояний свободной точки.

Единичную нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности $\mathfrak{M}$ также можно задать двумя способами:

$$1)\ \mathbf{n}(x,y,z)=\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|};\quad 2)\ \mathbf{n}(q_1,q_2)=\frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\right]\right|}.$$

Если вектор $\mathbf{a}$ приложен в точке $\mathbf{r}\in\mathfrak{M}$, то пусть

$$a_\perp=(\mathbf{a},\ \mathbf{n})$$

его нормальная компонента (число),

$$\mathbf{a}_\nabla=\mathbf{a}-a_\perp\mathbf{n}$$

его касательная компонента (вектор).

Евклидова структура в $\mathbf{R}^3$ индуцирует положительно определенное скалярное произведение векторов каждого касательного пространства $T^{\mathbf{r}}(\mathfrak{M})$. Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{v}=v_1\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}+v_2\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2},\quad \mathbf{w}=w_1\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}+w_2\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}$$