вычисляется по формуле

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = E v_1 w_1 + F(w_2 v_1 + v_2 w_1) + G v_2 w_2,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}\right), \quad F = \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}; \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\right), \quad G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}, \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\right).$$

Если заданы $q_1(t)$, $q_2(t)$, то вектор скорости имеет квадрат модуля:

$$v^2 = E\dot{q}_1^2 + 2F\dot{q}_1\dot{q}_2 + G\dot{q}_2^2 = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Получившаяся квадратичная форма называется первой квадратичной формой поверхности. Значение второй квадратичной формы как функции вектора скорости перемещения $\mathbf{r}(t)$ по определению равно $(\ddot{\mathbf{r}}, n)$, где $\mathbf{n}$ — нормаль. Так как

$$(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) - (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{n}}), \quad (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) \equiv 0,$$

то $(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}) = -(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{n}})$. Но $\dot{\mathbf{n}}$ — линейная форма по скоростям, так что $(\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{n})$ — действительно корректно определенная квадратичная форма; обозначим ее $((\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}))$. Легко получаются формулы

$$((\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial x} & \frac{\partial n_x}{\partial y} & \frac{\partial n_x}{\partial z} \\ \frac{\partial n_y}{\partial x} & \frac{\partial n_y}{\partial y} & \frac{\partial n_y}{\partial z} \\ \frac{\partial n_z}{\partial x} & \frac{\partial n_z}{\partial y} & \frac{\partial n_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$L = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1^2}, \mathbf{n}\right), \quad M = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_2}, \mathbf{n}\right), \quad N = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2^2}, \mathbf{n}\right).$$

Величины L, M, N суть функции точки на $\mathfrak{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ. Задана поверхность $\mathfrak{M}$ и сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. *Следующие определения движения эквивалентны.* Функция $\mathbf{r}(t)$ называется *движением*, если удовлетворяются условие $f(\mathbf{r}(t)) \equiv 0$ и

$O1$) принцип д'Аламбера—Лагранжа: $(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}, \delta_{\mathbf{r}}) = 0$, где $\delta_{\mathbf{r}}$ — произвольный касательный вектор в точке $\mathbf{r}(t)$;

$O2$) закон Ньютона и условие идеальности связи:

а) $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — так называемая сила реакции связи, удерживающая точку на поверхности,

б) реакция $\mathbf{R}$ ортогональна поверхности;

$O3$) внутреннее уравнение движения:

$$m\mathbf{a} = F_{\mathrm{V}};$$

$O4$) принцип Гаусса: все кривые $\mathbf{r}(t)$, удовлетворяющие условию связи, т. е. «перемещения», будем, по Гауссу, называть «мыс-