Уравнениями вида (1) можно пользоваться и тогда, когда $f=f(x, y, z, t)$, т. е. связь явно зависит от времени.

ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ. По аналогии с § 1 имеем:

А) *интеграл импульса* вдоль оси x:

$$X=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0 \Rightarrow J_1=m\dot{x}=\mathrm{const};$$

Б) *интеграл кинетического момента* относительно оси Oz:

$$xY-yX\equiv 0,\ x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0 \Rightarrow J_2=m(x\dot{y}-y\dot{x})=\mathrm{const}$$

(выводится из теоремы об изменении момента из § 3);

В) *интеграл энергии:*

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x},\ Y=-\frac{\partial V}{\partial y},\ Z=-\frac{\partial V}{\partial z},\ \frac{\partial f|}{\partial t}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+V(x, y, z)=h=\mathrm{const}.$$

Здесь и всегда потенциал V не зависит от времени.

Задача 8. Точка m движется по горизонтальному цилиндру $\mathfrak{M}=\{y^2+z^2-r^2=0\}$ в поле силы тяжести; $V=mgz$. Здесь есть интеграл импульса и энергии:

$$J_1=m\dot{x}=c,\ H=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+mgy=h.$$

Найти область возможности движения $\mathfrak{M}_c{}^h$.

Задача 9. Точка m движется по вертикальному цилиндру $\mathfrak{M}=\{x^2+y^2-r^2=0\}$ в поле силы тяжести; есть интегралы момента относительно оси z и энергии. Определить область возможности движения $\mathfrak{M}_c{}^h$ и множество достижимости $A_{v_0}(\mathbf{r}_0)$ (использовать внутреннее уравнение движения).

Задача 10. Точка единичной массы находится на эллипсоиде $\mathfrak{M}=\{Ax^2+By^2+Cz^2=1\}$ и движется по инерции ($\mathbf{F}\equiv 0$), так что траектория движения является геодезической линией. Интеграл энергии $H={}^1/_2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$. Доказать, что имеется еще квадратичный по скоростям интеграл

$$\Phi=\frac{1}{2}(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)(A\dot{x}^2+B\dot{y}^2+C\dot{z}^2),$$

и что в уравнениях движения (1) множитель Лагранжа

$$\varkappa=-\frac{1}{2}\,\frac{A\dot{x}^2+B\dot{y}^2+C\dot{z}^2}{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}.$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. Пусть сила $\mathbf{F}$ потенциальна, так что

$$m\ddot{x}+\frac{\partial V}{\partial x}=\varkappa\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{5.2}$$