$$m\ddot{y}+\frac{\partial V}{\partial y}=\varkappa\frac{\partial f}{\partial y},\quad m\ddot{z}+\frac{\partial V}{\partial z}=\varkappa\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Теорема. *В координатах на поверхности* $\mathfrak{M}$ *функции* $q_1(t)$, $q_2(t)$ *задают движение тогда и только тогда, когда являются решениями системы уравнений Лагранжа, получаемых по формулам*

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_2}-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0, \tag{5.3}$$

где *функция Лагранжа (лагранжиан)*

$$L=T-V=\frac{m}{2}(E\dot{q}_1^2+2F\dot{q}_1\dot{q}_2+G\dot{q}_2^2)-V(x(q_1,q_2),y(q_1,q_2),z(q_1,q_2)). \tag{5.4}$$

*Интеграл энергии* $H=T+V$ отличается от $L$ знаком перед $V$.

Доказательство. Уравнения (5.2) умножим соответственно на $\frac{\partial x^*}{\partial q_i}, \frac{\partial y^*}{\partial q_i}, \frac{\partial z^*}{\partial q_i}$ и сложим. Справа получим нуль, а слева

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}=$$

$$=\frac{d}{dt}m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)-m\left[\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\right.$$

$$\left.+\dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right]+\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2\Rightarrow\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial x}{\partial q_i},\quad \frac{\partial\dot{x}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i},$$

и аналогично для остальных координат. Получим

$$\frac{d}{dt}m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_i}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{q}_i}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{q}_i}\right)-m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial q_i}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial q_i}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial V}{\partial q_i}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}-V\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}-V\right),$$

что и требовалось.

Функция Лагранжа $L$ определена инвариантно, глобально, т. е. не зависит от выбора локальных координат на поверхности. Если $\mathbf{r}\in\mathfrak{M}$, а скорость $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{r}}(\mathfrak{M})$, то $L=m\mathbf{v}^2/2-V(\mathbf{r})$ зависит от состояния и только. Из этого вытекает, что мы имеем право