по нашему усмотрению заменять координаты в выражении L; если

$$q_i = q_i(\xi_1, \xi_2),$$

то

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_1}\dot{\xi}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_2}\dot{\xi}_2,$$

и, вносят эти выражения в $L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2)$, получим новое аналитическое выражение $L(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \xi_1, \xi_2)$ и новые уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0,$$

равносильные уравнениям (3).

Впредь в (4) заменим mE на E, mF на F и mG на G.

§ 6. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

Пусть $\gamma_0(t) = (q_1(t), q_2(t))$, $t \in [\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$ — некоторое движение из точки a в точку b на поверхности $\mathfrak{M}$. Выделим эту кривую среди множества других кривых $\gamma: [\bar{t}, \bar{\bar{t}}] \to \mathfrak{M}$, концы которых суть те же точки.

Теорема. *Движение $\gamma_0(t)$ есть экстремаль функционала*

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}} L(\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), q_1(t), q_2(t))\,dt = \mathscr{L}[\gamma(t)],$$

т. е. *вариация $\delta\mathscr{L} = 0$ на движении* $\gamma_0(t)$ (принцип Гамильтона).

Разъяснения. I. Здесь не используется конкретная структура лагранжиана, а важно лишь то, что движение удовлетворяет уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

II. *Вариацией* кривой $\gamma_0(t)$ называется всякое семейство кривых $\gamma_\alpha(t) = \gamma(t, \alpha)$, $\alpha \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$, такое, что

а) $\gamma(\bar{t}, \alpha) \equiv a$, $\gamma(\bar{\bar{t}}, \alpha) \equiv b$;

б) $\gamma(t, 0) \equiv \gamma_0$.

III. Для отдельно взятой вариации получаем функцию

$$\mathscr{F}(\alpha) = \int_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}} L(\dot{\gamma}_\alpha(t), \gamma_\alpha(t))\,dt,$$

свою для каждой вариации.

IV. Условие $\delta\int L dt = 0$ означает по определению, что для любой вариации

$$\left.\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$