Доказательство теоремы (точнее, лишь основная идея). Вычислим

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}=\int\left(\sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i(\alpha,t)}{\partial \alpha}+\sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i(\alpha,t)}{\partial \alpha}\right)dt.$$

Но $\dot q_i=\partial q_i(\alpha,t)/\partial t$, так что

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}=\int\left(\sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}+\sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial^2 q_i}{\partial t\partial \alpha}\right)dt=\sum\int \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}dt+$$

$$+\sum\int \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}d\,\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}=$$

(интегрируем по частям)

$$=\sum\int\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\Bigg|_{\bar t}^{\bar{\bar t}}=$$

(так как $\gamma(\bar t,\alpha)=a$, $\gamma(\bar{\bar t},\alpha)=b$)

$$=\sum\int_{\bar t}^{\bar{\bar t}}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}dt=0.$$

Поскольку $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$ — фактически произвольные функции t, нулю должны быть равны множители при них, т. е. должны выполняться уравнения Лагранжа (они называются уравнениями Эйлера—Лагранжа рассматриваемой вариационной задачи).

ПРИНЦИП ЯКОБИ. Теперь используем структуру лагранжиана:

$$\widehat{L}=\frac{1}{2}(E\dot q_1^2+2F\dot q_1\dot q_2+G\dot q_2^2)-\breve V=\breve T-\breve V,$$

и факт наличия интеграла энергии:

$$K=T+V=h.$$

Пусть произвольно *зафиксирована область возможности движения* $\mathfrak{M}^h=\{V\leqslant h\}$. Наряду с исходной римановой метрикой:

$$dl^2=Edq_1^2+2Fdq_1dq_2+Gdq_2^2$$

в области $V<h$ введем *метрику Якоби*:

$$ds=\sqrt{2(h-V)}\,dl.$$

Теорема (принцип Якоби). Траектории движения с энергией h суть геодезические метрики ds в области $\{V<h\}$.

Разъяснения. I. Рассматривается функционал длины в метрике Якоби. А именно если $\gamma(t)$ — кривая на $\mathfrak{M}$, то ее длина

$$s\,|\gamma|=\int_{\bar t}^{\bar{\bar t}}\sqrt{2(h-V(q))}\,\sqrt{E\dot q_1^2+2F\dot q_1\dot q_2+G\dot q_2^2}\,dt. \qquad (6.1)$$