II. Значение функционала длины не зависит от параметризации кривой: если имеется замена переменной $t=t(\tau)$ и $\tilde{\gamma}(\tau)=\gamma(t(\tau))$, то $s[\tilde{\gamma}]=s[\gamma]$ (для доказательства надо выполнить замену в интеграле (1)).

III. Геодезические можно трактовать как экстремали функционала длины: кривая γ_0 — геодезическая, если для любой вариации вида:

$$\gamma_\alpha(t)=\gamma(t, \alpha),\ \gamma(t, 0)\equiv\gamma_0(t),$$
$$\gamma_\alpha : [\bar{t}(\alpha), \bar{\bar{t}}(\alpha)],\ \gamma_\alpha \in \{V<h\},$$
$$\gamma_\alpha(\bar{t})=a,\ \gamma_\alpha(\bar{\bar{t}})\equiv b,$$

справедливо утверждение

$$\frac{d}{d\alpha} s[\gamma_\alpha]|_{\alpha=0}=0.$$

IV. Обратим внимание на то, что определение вариации иное, нежели в случае принципа Гамильтона. А именно интервал определения $(\bar{t}(\alpha), \bar{\bar{t}}(\alpha))$ уже необязательно постоянен. Формально здесь класс вариаций шире, но это расширение несущественно в силу II.

Доказательство теоремы. Поскольку значение функционала длины не зависит от параметризации, мы имеем право принять, что вдоль варьируемой кривой имеет место «интеграл энергии»:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+V=h \tag{6.2}$$

и что у варьируемых кривых интервал определения тот же самый. Поскольку вся кривая $\gamma_0(t)\in\{V<h\}$, выполнено неравенство

$$V(\gamma_0(t))<h-\varepsilon,\ \varepsilon>0,$$

и, следовательно,

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2>\varepsilon.$$

Поэтому при всякой вариации γ_α при достаточно малых α выполнены неравенства:

$$V(\gamma_\alpha(t))<h-\varepsilon/2,\ \frac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2>\varepsilon/2,$$

подинтегральное выражение $\Phi(\dot{q}, q)$ в (1) не обращается в нуль и потому не теряет гладкости.

Таким образом, кривая $\gamma_0(t)$ является геодезической тогда и только тогда, когда вдоль нее выполнено тождество (2) и она является экстремалью функционала (1) в смысле принципа Гамильтона. Выпишем уравнения Эйлера—Лагранжа для этого функционала:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\sqrt{2(h-V)}}{\sqrt{2T}}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i},$$