$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_i} = -\frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{2(h-V)}}\frac{\partial V}{\partial q_i} + \sqrt{\frac{2[(h-V)}{2T}}\frac{\partial T}{\partial q_i},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial q_i} = \left(\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{h-V}{T}}\right)\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sqrt{\frac{h-V}{T}}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} -$$

$$-\sqrt{\frac{h-V}{T}}\frac{\partial T}{\partial q_i} + \sqrt{\frac{T}{h-V}}\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$\left(\text{учитывая, что } \sqrt{\frac{h-V}{T}} \equiv 1\right)$, где $L = T - V$. Теорема доказана.

Принцип Якоби позволяет пользоваться различного рода фактами из римановой геометрии, например:

А. Пусть имеется точка a на римановом многообразии $\mathfrak{M}$ с метрикой dl. Тогда для всех точек b, достаточно близких к a, существует геодезическая, идущая из a в b, причем длина ее будет минимальной в классе всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки.

Б. На компактном связном римановом многообразии любые две точки можно соединить геодезической.

Заметим, что множество $\{V<h\}$, несмотря на свой «открытый» вид, может быть компактным многообразием. А именно если само $\mathfrak{M}$ компактно и $h>\max\limits_{\mathfrak{M}} V$, то $\{V<h\}=\mathfrak{M}$. В этой ситуации не составляет труда «применить к механике» множество теорем о геодезических на компактных многообразиях, на чем останавливаться мы не будем, так как на этом пути игнорируется характерная, интересная и неудобная в обращении особенность метрики Якоби: если область возможности движения $\mathfrak{M}^h$ имеет непустую границу, то на ней коэффициент $\sqrt{2(h-V)}$ обращается в нуль, так что метрика Якоби ds полностью вырождается. Но это не мешает движению дойти до границы, так что просто исключить ее из рассмотрения невозможно.

З а д а ч а 11. Показать на примерах, что из-за вырождения метрики Якоби на границе даже в случае компактного $\mathfrak{M}^h$ неверно, что любые две точки можно соединить геодезической.

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИНЦИПА ЯКОБИ. Ниже будем предполагать, что на $\{V=h\}$ нет критических точек функции V; следовательно, граница — гладкое подмногообразие. Область $\mathfrak{M}^h$ для простоты считаем связной.

Л е м м а 1. *Если некоторое движение пришло на границу, то назад оно уйдет по той же траектории.*

В самом деле, если $\gamma(t)$ — движение, то $\gamma(-t)$ — движение. Пусть при $t=0$ движение оказалось на границе: $\gamma(0)\in\{V=h\}$, т. е. скорость $v=0$. Тогда $\gamma(t)$, $\gamma(-t)$ имеют одинаковые начальные состояния и по теореме единственности совпадают.