Следствие. Если некоторое движение имеет с границей две общие точки, то это движение периодическое в силу леммы 1; оно называется *либрацией.*

Первая теорема Козлова (без доказательства). *Если граница компактной ОВД $\mathfrak{M}^h$ имеет $n$ компонент связности, то существует $n-1$ либрация* (рис. 59).

Определение. Рассмотрим всевозможные кривые:

$$\gamma : [\bar{t}, \bar{\bar{t}}] \to \mathfrak{M}^h$$

и введем обозначения:

$$\Omega_{ab} = \{\gamma : \gamma(\bar{t}) = a,\ \gamma(\bar{\bar{t}}) = b\},$$

$$\Omega_a = \{\gamma : \gamma(\bar{\bar{t}}) = a,\ \gamma(\bar{t}) \in \{V = h\}\}. \qquad (6.3)$$

Величина $\delta(a,b) = \inf\limits_{\gamma\in\Omega_{ab}} s(\gamma)$ называется *расстоянием между двумя точками $a$ и $b$*; величина $\delta(a) = \inf\limits_{\gamma\in\Omega_a} s(\gamma)$ — *расстоянием от точки $a$ до границы.* Расстояние между двумя точками на одной связной компоненте границы равно 0; аксиомы метрического пространства выполняются только внутри $\mathfrak{M}^h$.

Лемма 2. *Имеют место неравенства:*

(а) $\delta(a, b) \leqslant \delta(a, c) + \delta(b, c)$;

(б) $\delta(a, b) \leqslant \delta(a) + \delta(b)$, *если граница связна;*

(в) $\delta(a) \leqslant \delta(a, b) + \delta(b)$.

Докажем (б). Возьмем две точки $a$ и $b$. Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — произвольные кривые, которые идут до границы и достигают ее в точках $C_1$, $C_2$. Тогда

$$\delta(a) + \delta(b) = \inf(s(\gamma_1) + s(\gamma_2)).$$

Чтобы оценить $\delta(a, b)$, рассмотрим кривые вида $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ (где $\gamma_3$ — участок границы от $C_1$ до $C_2$). Получим $\delta(a, b) \leqslant \inf s(\gamma) = \delta(a) + \delta(b)$, поскольку $s(\gamma_3) = 0$.

Доказательство (а) следует из определения расстояния между двумя точками и свойств точной нижней грани.

Доказательство (в) оставляется в качестве упражнения.

Лемма 3 (без доказательства). *Существует $\eta$-окрестность границы* (в смысле метрики Якоби) *такая, что если выпустить траектории от границы с начальной скоростью $v = 0$, то они не пересекутся,* т. е. они взаимно-однозначно отображают множество $\{V = h\}$ на границу его $\eta$-окрестности.

Вторая теорема Козлова (рис. 59). Пусть у нас есть внутренняя точка $a$ и вычислено $\delta(a)$. Тогда *существует движение $\gamma_0$, выходящее на границу* (т. е. $\gamma_0 \in \Omega_a$) *и такое, что его длина в метрике Якоби равна* $\delta(a)$ (иначе говоря, из любой точки всегда можно попасть на границу, причем по кратчайшей кривой).

Доказательство. 1. Будем исходить из следующей основной конструкции. Построим сферу (окружность) $\Sigma_\varepsilon$ с центром в точке $a$ и малым радиусом $\varepsilon$ в метрике Якоби. Возьмем точку