$b \in \Sigma_\varepsilon$ такую, что для всех $c \in \Sigma$ будет $\delta(c) \geqslant \delta(b)$. Рассмотрим геодезическую $\gamma_a(s)$, соединяющую точки a и b, продолженную максимально за точку b и параметризованную длиной дуги s (она и будет искомой кривой γ_0).

2. Чтобы найти $\delta(a)$, надо определить inf длин всех кривых, выходящих на границу из точки a; все они пересекут нашу окружность (сферу) Σ_ε. Участок кривой от a до точки c последнего пересечения ее с Σ_ε можно заменить на более короткий участок геодезической, соединяющей a с c, длина которого ε, а inf длины оставшегося участка равен $\delta(c)$. Отсюда замечание:

$$\delta(a) = \min_{c \in \Sigma_\varepsilon} \delta(\varepsilon + \delta(c)) = \varepsilon + \delta(b). \tag{6.4}$$

3. Утверждение: кривая $\gamma_a(\varepsilon)$ определена как минимум на интервале $[0, \delta(a))$, и при этом

$$\delta(\gamma_a(s)) = \delta(a) - s, \tag{6.5}$$

при $s \in [\varepsilon, \delta(a))$.

Применим «непрерывную индукцию». Кривая $\gamma_a(s)$ определена на открытом интервале, содержащем точку ε, и при этом $\delta(\gamma(\varepsilon)) = \delta(a) - \varepsilon$ согласно замечанию. Равенство (5) выполняется на некотором замкнутом интервале; пусть s_1 — его верхняя граница. Покажем, что равенство (5) окажется справедливым при некотором $s_2 > s_1$, что приведет нас к противоречию. Для этого применим снова основную конструкцию к точке $a_1 = \gamma(s_1)$. В силу замечания

$$\delta(\gamma_{a_1}(\varepsilon)) = \delta(b_1) = \delta(a_1) - \varepsilon = \delta(a) - s_1 - \varepsilon_1 = \delta(a) - (s_1 + \varepsilon_1),$$

а в силу леммы 2 (в)

$$\delta(a, b_1) \geqslant \delta(a) - \delta(b_1) = s_1 + \varepsilon_1.$$

С другой стороны, по лемме 2 (а)

$$\delta(a, b_1) \leqslant \delta(a, a_1) + \delta(a_1, b_1) = s_1 + \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\delta(a, b_1) = s_1 + \varepsilon_1.$$

Это означает, что геодезическая γ_{a_1} есть продолжение геодезической γ_a, т. е. угол $\angle a a_1 b_1 = \pi$ (в противном случае две точки вблизи излома можно было бы соединить более короткой геодезической). Равенство (4) переписывается в виде

$$\delta(\gamma_a(s_1 + \varepsilon)) = \delta(a) - (s_1 + \varepsilon_1),$$

т. е. $s_2 = s_1 + \varepsilon$ и есть искомое. Итак, равенство (5) выполнено на всем интервале определения $[0, \bar{s})$. Если $\bar{s} < \delta(a)$, то возьмем точку $\bar{a} = \lim_{\gamma \to \bar{s}} \gamma_a(s)$. По непрерывности получаем $\delta(\bar{a}) = \delta(a) - \bar{s}$, применив к a основную конструкцию, продолжим γ_a дальше.

Утверждение доказано. Из него вытекает, что геодезическая γ_a попадает в η-окрестность границы из леммы 3.

4. Точка $\gamma_a(\delta(a) - \eta)$ лежит на границе η-окрестности. Геодезическая, соединяющая ее с множеством $\{V = h\}$ по лемме 3,